Instituto Superior de Economia
Universidade Técnica de Lisboa

RESSEGURO

Um contributo para a determinação dos limites óptimos de retenção da seguradora directa

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Métodos Matemáticos Aplicados à Economia e Gestão de Empresas.

ONOFRE ALVES SIMÕES

Setembro de 1988

Este trabalho foi realizado sob a orientação da Professora Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno, a quem estou infinitamente reconhecido pelo seu sincero interesse e profundo empenho.

Agradeço também a todos quantos, ao longo do tempo, me deram o conforto e o estímulo das suas sugestões, da sua ajuda e, principalmente, da sua amizade.

RESUMO

Uma companhia seguradora, como qualquer empresa, debate-se continuamente com a necessidade de orientar o seu funcionamento de maneira a contemplar (ainda que não necessariamente no mesmo grau), os quatro objectivos empresariais clássicos, a saber, o lucro, o crescimento, a autonomia e a segurança.

Dadas as particulares características de risco do sector segurador, a segurança é, naturalmente, o aspecto mais relevante de todos. O instrumento quase sempre utilizado para suavizar os efeitos de possíveis catástrofes que, de uma forma mais ou menos inesperada, se podem abater sobre a companhia, consiste precisamente em ressegurar parte dos riscos por ela aceites, junto de outras seguradoras, que passam assim a resseguradoras. Após ter optado pelo resseguro, a questão que se coloca à seguradora é, evidentemente, "como ressegurar" (pois há várias alternativas) e também "quanto ressegurar" da sua carteira de apólices.

A finalidade última do presente trabalho, consiste essencialmente em dar resposta a esta dupla interrogação: primeiro, pela apresentação de algumas das soluções que têm sido obtidas com o decorrer do tempo nalguns estudos feitos neste domínio; depois, pela resolução do mesmo problema considerando um conjunto de circunstâncias de algum modo ainda não contemplado anteriormente. A sustentar toda esta exposição, serão igualmente introduzidos os conceitos teóricos e princípios práticos base na actividade seguradora.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta é uma tese realizada no âmbito do curso de mestrado em Métodos Matemáticos para Economia e Gestão de Empresas e, portanto, na escolha do tema, havia a necessidade de pensar em algo que conjugasse simultâneamente o aspecto matemático com a sua aplicação à Economia ou à Gestão de Empresas.

A opção pelo tema do **Resseguro** acabou por revelar que dificilmente se poderia ter escolhido um outro ramo de actividade onde, tanto como no ramo segurador, a gestão empresarial se encontra directamente dependente da aplicação de métodos matemáticos, mais precisamente, da teoria das probabilidades, da estatística e da investigação operacional.

Na verdade, o recurso à estatística (quase sempre descritiva) está bastante generalizado, em qualquer empresa de qualquer sector, desde que atingida uma certa dimensão. Nas empresas seguradoras o seu papel vai contudo muito mais longe: nestas, é à estatística que compete apoiar de forma determinante todo o processo de tomada de decisão que é desenvolvido, desde a fixação dos prémios, até à escolha das medidas apropriadas para que a probabilidade de ruína seja mantida a um nível aceitável.

Estando a actividade seguradora, muito mais do que a maioria dos outros ramos de actividade, sujeita à influência de uma enorme diversidade de factores aleatórios, torna-se de todo indispensável proceder à caracterização probabilística desses factores, de tal modo que as decisões que é necessário tomar, o sejam com um conhecimento tão completo quanto possível dos seus prováveis efeitos, e não deixando tudo nas mãos do acaso.

Também a investigação operacional (fundamentalmente a programação não linear), encontra na actividade seguradora um bom domínio de actuação, pois a natural complexidade e especificidade do sector originam problemas que só com o recurso a técnicas de optimização se podem resolver satisfatoriamente.

A existência duma tão estreita ligação entre estas disciplinas e a gestão das companhias de seguros, conduziu, por uma necessidade de sistematização, à divisão deste trabalho em três partes distintas, mas entre as quais se tentou estabelecer uma sequência tão harmoniosa quanto possível.
O objectivo procurado com tal partição consistiu na apresentação do tema em presença de tal modo que, ao passar-se da primeira parte para a segunda, e desta para a terceira, se fosse verificando uma evolução caracterizada pelo seguinte: por

um lado, começar pelos aspectos mais gerais e ir progredindo até à apresentação de situações já bastante particularizadas relacionadas com o resseguro; por outro, e de forma paralela, ter em atenção não só as questões de ordem teórica e matemática, mas também alguns daqueles elementos de natureza prática que ajudam à compreensão de tais questões.

Assim sendo, na primeira parte começam por ser introduzidos apenas os conceitos fundamentais da chamada teoria do risco, que é o corpo teórico que serve de suporte a toda a prática seguradora. Trata-se, por conseguinte, de um texto essencialmente descritivo, sendo o problema específico do resseguro abordado somente de forma passageira e quando se justifica destacar a sua particular conexão a este ou àquele conceito.

Em suma, neste ponto do trabalho, o objectivo não é mais do que introduzir, logo de início, os conceitos estatísticos envolvidos na análise da actividade seguradora, salientando o conceito de processo de risco, o conceito de probabilidade de ruína e os princípios teóricos de cálculo dos prémios e não se entrando em qualquer outro tipo de extensões.

Passando à segunda parte, esta é já completamente dedicada a aspectos relativos ao resseguro, nomeadamente, e dum ponto de vista mais prático, aos tipos de resseguro que se podem praticar, às situações concretas a que se aplica cada um deles e aos tipos de contratos praticados, um aspecto que também é relevante. Como onde existem vários caminhos, há sempre o problema de decidir qual deles é o melhor, esta segunda parte termina com uma síntese de alguns resultados obtidos teoricamente por diferentes autores, nas suas tentativas de determinar qual será a forma de resseguro óptima em determinadas situações, por eles definidas à partida, e tendo em vista um certo objectivo. No final, são ainda referidas duas soluções para este problema, mas considerando a situação particular em que é feito um resseguro *recíproco* entre duas companhias, condição que vai permitir que se tirem conclusões muito significativas sobre as próprias vantagens absolutas que a prática do resseguro pode trazer às companhias intervenientes.

Por último, a terceira parte surge quase como uma extensão desta síntese que a antecede, no sentido em que se vai procurar generalizar um dos resultados que nesta foram apresentados. Em termos muito gerais, pode acrescentar-se que a referida generalização resulta do problema originalmente concebido, incluindo-lhe elementos adicionais que, pensa-se, conduzem a um modelo mais completo e que traduz de uma forma bastante mais aproximada aquilo que de facto acontece na realidade.

Aliás, repita-se, é difícil encontrar outro ramo de actividade onde, tanto como no ramo segurador, seja possível modelizar de forma tão completa e até integrada a realidade empresarial. Para todos aqueles que se mostram duvidosos sobre a possibilidade dos métodos quantitativos virem a assumir o papel principal como instrumento de decisão na gestão duma empresa, não há contra-exemplo melhor.

PARTE I

Elementos Fundamentais da Teoria do Risco

1 Seguro e Resseguro

Sendo este um trabalho completamente dedicado ao tratamento de questões relativas à actividade seguradora, impõe-se que, logo de início, algumas palavras sejam ditas sobre seguro e resseguro.

Evidentemente que, de certa maneira, não há ninguém que não tenha alguma noção sobre as características do ramo segurador pois, duma forma ou doutra, mais tarde ou mais cedo, voluntária ou involuntariamente, todos acabamos por ter alguma ligação com esse ramo. É do domínio comum, e sem ser necessário recorrer a alguma elaborada função de utilidade, que muitos de nós preferem transferir alguns dos riscos a que a nossa existência e actividade estão sujeitas para uma outra entidade, mediante o pagamento de uma retribuição entre as duas partes acordada. Como o que está em causa nesta transferência de um risco de uma entidade para outra entidade é, afinal, uma questão de segurança, diz-se por isso que aquela que cede, isto é, *passa* o risco e paga a retribuição é o **segurado** e a que aceita o risco e recebe a retribuição é o **segurador**. Entre ambas estabelece-se assim um contrato de **seguro** e a retribuição acordada é o **prémio de seguro**. Se atendermos a que praticamente todas as actividades estão ligadas a alguma espécie de risco, não é surpreendente que possa existir uma enorme variedade de contratos de seguro, todos diferentes uns dos outros.

Uma limitação deve contudo ser feita: a par da imensidade de riscos que podem ser transferidos por meio de um contrato de seguro, existem muitos outros riscos correntes sobre os quais essa possibilidade não se coloca. Sundt [14, pág. 1], dá alguns exemplos (triviais) disso. Diz ele que

> "When planning a picnic, you will risk that it will rain.
> When you order a theatre ticket, you risk that it is sold out.
> When proposing to a girl, you risk she will say no."

Estes, tal como muitos outros, não são aquilo que se designa por riscos económicos, isto é, não envolvem quase nunca - com excepção, talvez, do terceiro caso - um factor económico relevante e portanto em relação a eles não se considera a questão do seguro.

Tal já não acontece se se tratar do risco de que uma habitação se incendie, ou de que um automóvel seja roubado, por exemplo, pois trata-se de situações que exigem largos dispêndios para que a situação anterior ao incidente seja reposta; logo, são regra geral estes riscos *económicos* que são cedidos às companhias seguradoras em troca dos correspondentes prémios, ficando assim assegurado que caso a desgraça ocorra são estas que suportarão os danos (económicos) sofridos.

Deve acrescentar-se, no entanto, que nem mesmo todo e qualquer risco económico é passível de ser segurado: as companhias seguradoras naturalmente que não estão dispostas a aceitar riscos que não se encontram associados à concretização de acontecimentos súbitos e imprevistos, pois *do seu ponto de vista* esses não são verdadeiramente riscos.

Assim sendo, um seguro de vida normal, por exemplo, não cobre as situações onde o segurado coloca de forma desnecessária e descuidada a sua vida em perigo. Do mesmo modo, um seguro contra incêndio não cobrirá os prejuízos provocados por um incêndio, se for apurado que este deflagrou devido a grave incúria do segurado. E, como estes, muitos outros exemplos se podem encontrar de riscos não aceites pelas seguradoras. Mesmo assim, é claro que continua a haver toda uma infinidade de situações (cada vez mais diversas) onde é possível comprar e vender a segurança, o que faz com que os domínios onde se realizam estas transacções sejam realmente muito vastos e complexos.

E são de tal forma vastos e complexos, que muitas vezes as próprias companhias seguradoras se vêem forçadas (para diminuirem elas próprias o risco da sua própria falência) a comprarem segurança a outras seguradoras, tal como qualquer dos comuns indivíduos ou empresas se lhes dirigem para segurarem este ou aquele risco. Como o risco duma seguradora falir está acima de tudo ligado aos riscos que ela aceitou de terceiros, e que se revelam assim demasiado pesados para as suas capacidades, então a solução possível está em ceder parte desses riscos a outra (ou outras) seguradora(s). Quando isto acontece, isto é, quando uma companhia seguradora tem que ceder parte da sua carteira de negócios a outras companhias, diz-se que os riscos cedidos estão a ser ressegurados. Nisto consiste um contrato de **resseguro**.

A companhia que aceita esses riscos é a **resseguradora**; a que os cede é a **cedente**. E, como não podia deixar de ser, a resseguradora também vai exigir que lhe seja pago um prémio que esteja em concordância com os riscos por ela aceites. Esse é o **prémio de resseguro**.

Citando ainda Sundt [14, pág. 19], podemos então sintetizar que o que leva uma companhia seguradora a ressegurar parte da sua carteira é a constatação de que

" but even for such a professional risk carrier,
the risk business may be too risky... ".

Esta é, de facto, a principal razão, mas existem outras. Um exemplo disso é a capacidade que a prática do resseguro confere às companhias cedentes para expandirem o seu volume de negócios, sem que seja necessário proceder a aumentos no seu capital (que podem não ser possíveis) e sem que os limites mínimos de segurança impostos pela lei sejam desrespeitados.

Esta capacidade acrescida revela-se de modo particular na possibilidade que as companhias passam a ter de poderem aceitar riscos de grande dimensão e que na inexistência do resseguro teriam que ser rejeitados - no que se daria oportunidade à concorrência para melhorar a sua posição no mercado. [Decerto que além da rejeição, ainda haveria a alternativa do co-seguro, mas nesse caso já seriam várias as companhias a subscrever directamente a apólice e, portanto, o efeito no volume de negócios viria muito mais diluído do que se fosse só a companhia a aceitá-la.]

Verifica-se assim que o resseguro permite às companhias não só aceitarem maiores riscos - até em sectores que de outra forma prefeririam evitar - como ainda lhes permite protegerem-se contra percas que poderiam pôr em perigo a sua solvência, pois o perigo de serem suportadas grandes indemnizações é disseminado pelas resseguradoras com quem celebram contratos.

Postas as coisas desta maneira, fica a impressão de que o resseguro resolve todos os problemas que se colocam às seguradoras, mas uma questão se pode levantar: não serão estas vantagens até certo ponto fictícias? Realmente, se uma companhia aceita directamente um determinado risco, mas depois o passa a terceiros, então o reforço na sua posição não passa no fundo de um reforço aparente. Além disso, não é crível que as resseguradoras deixem de exigir pelo resseguro pelo menos tanto quanto a companhia recebeu pelo seguro e, logo, também do ponto de vista do aumento dos lucros não parece haver qualquer benefício.

É claro que também tudo isto é verdade, mas apenas se se pensar que uma companhia quando ressegura um certo risco, o ressegura na sua totalidade. Nesse caso, sim, tanto quanto se vê, e a não ser que se verifiquem condições excepcionais, não haverá qualquer interesse em que esse risco faça parte da sua carteira. Esta é contudo uma situação extrema, e como a virtude só raramente se encontra nos extremos, não é difícil admitir que entre a opção de ressegurar *tudo* e a outra opção extrema de *nada* ressegurar, existem infinitas soluções intermédias que combinam as vantagens e as desvantagens do resseguro nos mais diversos graus.

O grande problema que se coloca a uma seguradora, não é portanto se deve ressegurar ou não, mas sim, tendo em consideração os seus objectivos e as variantes de resseguro que o mercado lhe oferece, procurar escolher a *melhor forma* de ressegurar. Este é sempre um problema complicado.

2 A Actividade Seguradora e a Teoria do Risco

Como acabámos de ver, as companhias seguradoras existem para desempenharem a missão de tomarem sobre si os riscos que pendem sobre os seus clientes e que estes não estão dispostos a suportar. Tem-se então que, enquanto para as outras empresas o risco é algo de indesejável e que haveria toda a conveniência em suprimir (se isso pudesse ser feito), para as companhias seguradoras o risco é vital, é a verdadeira base da sua existência, e torna-se forçoso encontrar a melhor maneira de funcionar e sobreviver no seio de condições que, de repente, se podem tornar extraordinariamente adversas.

O primeiro instrumento de que as companhias se serviram, nesse seu esforço de coexistência com o risco, foram as técnicas actuariais clássicas, as quais se baseavam essencialmente nas frequências e nos valores médios das indemnizações. De acordo com essas técnicas, se considerarmos por exemplo uma seguradora com m riscos, cada um dos quais produzindo em média n indemnizações (suponha-se que durante um ano), e sendo o valor médio pago por indemnização igual a x, então, o que se esperaria que a companhia fosse pagar anualmente pelas indemnizações associadas a estes m riscos seria

$$y = mnx$$

Com base nestas estimativas seriam então calculados os prémios.

Só que, naturalmente, de ano para ano se verificava que o total de indemnizações pagas diferia por vezes substancialmente de y, apresentando uma oscilação mais ou menos pronunciada em torno deste valor. Isto acontecia porque tanto o número das indemnizações que efectivamente se davam, como o montante destas, se afastavam mais ou menos significativamente dos respectivos valores médios e a observação desse facto conduziu a que se passasse a adoptar uma perspectiva diferente: a perspectiva de que tanto o número de indemnizações suscitadas por cada particular risco, como os correspondentes montantes são, na verdade, variáveis aleatórias e que pode ser perigoso substituí-las por estimativas dos respectivos valores esperados. Com efeito, ao seguir-se tal procedimento, todo o fenómeno gerador dessas oscilações, por vezes inesperadas, é perfeitamente posto de lado e mesmo que nalguns casos isso acabe por não ter importância, na sua maioria certamente que a tem.

Foi esta a razão para que se verificasse uma evolução no sentido de se utilizarem modelos estocásticos, muito mais adaptados à realidade e à inevitável complexidade que ela apresenta.

O ramo da matemática actuarial que se dedica ao estudo dos diferentes tipos de flutuações actuantes numa carteira de apólices, e se dedica também à tentativa de modelização dos factores subjacentes a essas flutuações, representando-os tão sugestiva e fielmente quanto possível, é precisamente designado por *Teoria do Risco.*

Já em 1930, H. Crámer, citado por Borch [4, pág. 29], escrevia

" the object of the theory of risk is to give a mathematical analysis of the random fluctuations in an insurance business, and to discuss the various means of protection against their inconvenient effects".

Esta definição continua actual e muito embora ainda possa haver quem mostre um certo cepticismo àcerca da real aplicação prática dos desenvolvimentos da disciplina, parece inegável que, cada vez mais, as companhias seguradoras se interessam por esses progressos e procuram introduzi-los no seu processo de tomada de decisão, na medida em que isso contribui para racionalizar e optimizar o seu funcionamento.

3 Conceitos Básicos da Teoria do Risco

Dada a estreita ligação existente entre a teoria do risco e as instituições de seguros (aliás, a teoria do risco tem interesse apenas no contexto da actividade seguradora), certamente que é impensável fazer-se qualquer estudo sobre seguro ou resseguro sem que àquela teoria se faça contínua referência. Deste modo, vão apresentar-se desde já alguns dos seus conceitos fundamentais, especialmente aqueles que ao longo deste trabalho irão com uma maior frequência ser utilizados.

3.1 Processos de risco

Até agora, praticamente toda a exposição foi centrada à volta do chamado *risco*: do *risco* que o comum das pessoas quer evitar, do *risco* que as companhias seguradoras correm quando aceitam os riscos que os clientes para elas transferem, da teoria do *risco* e, chegados a este ponto, do processo de *risco*.

Mas para se poder apresentar o conceito de processo de risco é conveniente começar por definir, tão rigorosamente quanto possível, o que é que se entende por risco. Pois um risco, para uma companhia seguradora, é basicamente caracterizado, não por estar associado a, por exemplo, um seguro de vida ou um seguro contra roubo, mas sim pelo seguinte: por ser algo que suscita a cobrança de prémios, por um lado, e obriga eventualmente ao pagamento de indemnizações, por outro.

Um risco pode assim representar-se por um par ordenado de funções, (P_t, Y_t), onde P_t é a função que indica o montante dos prémios proporcionados pelo risco no intervalo de tempo (0,t] $(t > 0)$, e Y_t é o somatório das indemnizações pagas no âmbito desse risco no mesmo intervalo de tempo. Tanto a função P_t como a função Y_t podem ser funções aleatórias, mas o que é comum aceitar-se é que apenas Y_t é, ao longo do tempo, um processo estocástico, sendo P_t uma função determinística: P_t é a função prémio do risco em causa e Y_t é o processo que representa as indemnizações agregadas à medida que o tempo passa ou, como é mais vulgar, Y_t é o processo *gerador* das indemnizações ou *processo de risco.*

A teoria dos processos estocásticos permite-nos classificar o processo de risco como sendo um processo estocástico composto, no sentido em que se considera que tanto os momentos em que se dão as ocorrências que provocam as indemnizações (e portanto o respectivo número), como o montante destas, são aleatórios: no processo existe uma variabilidade simultânea (*composta*), tanto do número das indemnizações como do seu valor.

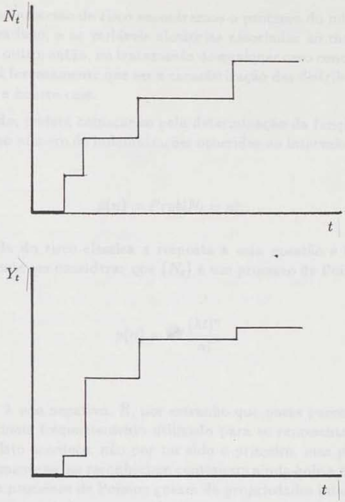
Mais concretamente, a variável aleatória Y_t é, em cada momento t fixo, igual ao somatório das indemnizações pagas até então e essa soma apresenta uma dupla aleatoriedade: tem um número aleatório de termos (podendo até entender-se que subjacente ao processo de risco se encontra um outro processo, gerador do *número* das ocorrências) e cada um desses termos é igualmente uma variável aleatória.

Atendendo a este duplo carácter aleatório, os processos de risco são normalmente estudados em duas "fases": na primeira tem-se em atenção o processo do número de indemnizações, nomeadamente a sua identificação e caracterização; seguidamente, conjugando este processo com as variáveis aleatórias que representam os montantes das indemnizações, estuda-se o próprio processo das indemnizações agregadas.

Se representarmos o processo do número de indemnizações por $\{N_t\}_{t>0}$ (onde N_t é o número de indemnizações que ocorreram no intervalo (0,t]) e por $\{Y_t\}_{t>0}$ o processo das indemnizações agregadas (onde Y_t é o montante total das indemnizações referentes a esse intervalo), é claro que os dois processos evoluem de forma paralela ao longo do tempo, muito embora as evoluções de um e do outro sejam diferentes.

Sugestivamente, pode dizer-se que os dois processos têm "saltos" nos mesmos momentos, mas que as alturas dos "saltos" respectivos são diferentes, como se procura ilustrar na figura da página seguinte.

FIGURA 1



Trajectórias típicas do processo do número de indemnizações e do processo de indemnizações agregadas correspondente.

De seguida, irá apresentar-se a representação na literatura mais usual para o processo de risco: o processo de Poisson composto.

O Processo de Poisson Composto

Dado que no processo de risco encontramos o processo do número de indemnizações, por um lado, e as variáveis aleatórias associadas ao montante de cada uma destas, por outro, então, no tratamento de qualquer caso concreto, a primeira coisa a fazer terá forçosamente que ser a caracterização das distribuições que estão envolvidas num e noutro caso.

Neste sentido, poderá começar-se pela determinação da função de probabilidade associada ao número de indemnizações ocorridas no intervalo de tempo (0,t], seja

$$p(n) = Prob[N_t = n].$$

Para a teoria do risco clássica a resposta a esta questão é fácil, e consiste muito simplesmente em considerar que $\{N_t\}$ é um processo de Poisson, isto é, que

$$p(n) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

com t positivo e λ não negativo. E, por estranho que possa parecer, é esse ainda hoje o processo mais frequentemente utilizado para se representar o número de indemnizações. Isto acontece, não por ter sido o primeiro, mas porque as qualidades que inicialmente se lhe reconheciam continuam ainda hoje a ser importantes. Para começar, os processos de Poisson gozam de propriedades interessantes, como por exemplo as que estabelecem que: 1) acontecimentos que ocorram em dois intervalos de tempo disjuntos são independentes; 2) o número de acontecimentos num dado intervalo depende apenas da amplitude deste e não do seu posicionamento no tempo; 3) a probabilidade de que ocorram dois ou mais acontecimentos simultâneamente e a probabilidade de que ocorra um número infinito de acontecimentos num intervalo de tempo finito são ambas nulas. Além disso, implicam uma certa facilidade na obtenção dos resultados.

O interesse destas propriedades reside no facto de que *"grosso modo"* elas se adaptam a um grande número de situações concretas do funcionamento duma seguradora. Aliás, mesmo naqueles casos em que as coisas não se passam exactamente assim, é quase sempre possível "compatibilizá-las" com o processo de Poisson. Evidentemente, isto não significa de modo algum que é obrigatório utilizar sempre esta representação: caso a caso, é indispensável que se confirme se se trata ou não de uma representação adequada e, caso não o seja, terá que se procurar outra. O que sucede é que, afortunadamente, em muitos casos se trata realmente duma representação aceitável.

Também não é difícil verificar (ver, por exemplo, [2]) que, com t fixo, vem

$$E[N_t] = \lambda t$$

$$V[N_t] = \lambda t$$

$$\gamma_{N_t} = (\lambda t)^{-1/2}$$

e que a função geradora de momentos é

$$M_{N_t}(\alpha) = e^{\lambda t(e^{\alpha}-1)},$$

onde $E[\ ]$, $V[\ ]$ e γ representam, respectivamente, o valor esperado, a variância e o coeficiente de assimetria.

Outra característica significativa do processo de Poisson, é a constatação de que a amplitude do intervalo de tempo que decorre entre dois acontecimentos sucessivos (entre duas indemnizações sucessivas, neste caso) é uma variável aleatória com distribuição exponencial, isto é, a duração do período (seja t_k) que decorre entre a indemnização de ordem $k-1$ e a indemnização de ordem k, satisfaz a condição

$$Prob[t_k \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \tag{2}$$

Para finalizar esta referência ao processo do número de indemnizações apenas duas considerações de ordem prática.

A primeira, diz respeito à obtenção dos valores das probabilidades (e da função de distribuição) da variável aleatória N_t (t fixo), pois a experiência ensina que só nos casos em que λ não é muito elevado se podem obter com vantagem esses valores (e, logo, essa função) a partir da expressão de $p(n)$. [Nos casos em que λ assume grandes valores, o processo geralmente seguido baseia-se ou em fórmulas de recorrência, ou em aproximações conhecidas da verdadeira distribuição. Beard [2], fornece vários exemplos.]

A segunda, tem a ver com aqueles casos em que o processo de Poisson não é, de modo nenhum, apropriado à situação em estudo, o que acontece, por exemplo, quando a ocorrência de uma indemnização aumenta a probabilidade da ocorrência de acontecimentos da mesma natureza daquele que provocou essa indemnização. Epidemias ou grandes incêndios ilustram este tipo de situações, onde se diz que existe "contaminação". Nestes casos, a experiência ensina que a distribuição adequada para caracterizar o processo do número de indemnizações num determinado intervalo de tempo será a binomial negativa.

Inversamente, quando a ocorrência de uma indemnização diminui a probabilidade de ocorrência de acontecimentos semelhantes no futuro (existe "contaminação negativa", o que é o caso quando um determinado medicamento provoca certas reacções secundárias perigosas e o facto é suficientemente divulgado, por exemplo), a distribuição adequada será a binomial. Finalmente, em sistemas com características ainda diferentes destas, outros modelos probabilísticos terão que ser considerados.

Passando agora ao processo de risco propriamente dito, isto é, ao processo das indemnizações agregadas $\{Y_t\}_{t>0}$, já foi visto que, para cada t fixo se tem

$$Y_t = \sum_{t_i \in S_t} X_{t_i} \tag{1}$$

onde S_t designa o conjunto dos pontos de "salto" do processo do número de indemnizações até ao momento t, e X_{t_i} designa o montante (aleatório) da indemnização ocorrida no momento t_i.

Vê-se assim que a caracterização do processo de risco passa agora pelo estudo da variabilidade do montante de cada indemnização e em particular, dado que se trata de variáveis aleatórias, pelo estudo da respectiva função de distribuição.

Normalmente, aceita-se (e é até uma hipótese dos processos de Poisson compostos) que as diferentes indemnizações provocadas por acontecimentos distintos podem considerar-se independentes entre si, identicamente distribuídas e independentes do número de indemnizações. Quando isso não acontece, ou por um mesmo acontecimento provocar vários pagamentos a apólices diferentes, ou por um único pagamento ter tido origem em vários acontecimentos separados, o que se faz é o seguinte: no primeiro caso, agregam-se todos esses pagamentos numa única indemnização; no segundo, desagrega-se o pagamento único nas indemnizações parcelares que lhe deram origem.

Quanto à existência de uma função de distribuição $G(x)$ do montante das indemnizações, pelo menos quando são considerados períodos com uma amplitude moderada, quase nunca é posta em causa. O historial da seguradora relativamente às indemnizações pagas anteriormente pode fornecer os elementos suficientes para que se consigam estabelecer estimativas numéricas da distribuição de X. Regra geral, admite-se que é uma função contínua, podendo as indemnizações assumir qualquer valor positivo, o que é tanto mais verdadeiro, quanto maior for o número de apólices incluídas na análise.

Aqui deve notar-se que um processo de risco tanto pode ser definido tendo em consideração a totalidade das apólices da carteira de uma companhia, como apenas um certo subconjunto desta (com mais ou menos elementos) e, como é evidente, os modelos estatísticos correspondentes têm que evidenciar apenas o que está em causa.

Quando o processo é definido no colectivo, isto é, considerando simultâneamente um *colectivo* de apólices da carteira da seguradora, é claro que não se entra em linha de conta com a particular apólice que origina cada uma das indemnizações, pois o que importa registar são os momentos e os montantes das indemnizações. Isto não significa que não se possa considerar a carteira em questão como sendo formada por um conjunto de apólices individuais, cada uma das quais com o seu próprio processo de risco, ou ainda que ela não possa ser subdividida por classes ou sub-classes, segundo o tipo de seguro efectuado, mas levanta-se nestas últimas alternativas o problema da agregação, que se pode tornar muito complicado.

Essa questão não se levanta, contudo, quando o processo do número de indemnizações é um processo de Poisson e portanto o processo das indemnizações agregadas é um processo de Poisson composto, como aqui se considera, pois Sundt [14, pág 78] demonstra o seguinte teorema:

Teorema 1 *Sejam* $\{Y_1(t)\}, ..., \{Y_k(t)\}$, $t \geq 0$, *k processos de Poisson compostos, independentes e homogéneos.* [1]

Admita-se que o processo i (i=1,...,k) tem intensidade da frequência das indemnizações igual a λ_i *e que a função de distribuição das indemnizações individuais é representada por uma função* G_i.

Seja $Y(t) = \sum_{i=1}^{k} Y_i(t)$.

Então, $\{Y(t)\}_{t>0}$ *é um processo de Poisson composto homogéneo com intensidade de frequência das indemnizações*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

[1]Diz-se que um processo é homogéneo se o limite, quando h tende para zero, do quociente

$$\frac{Prob[N(t+h)=n|N(t)=n-1]}{h},$$

não depende de t, qualquer que seja n, ou seja, as intensidades das frequências das indemnizações durante um determinado intervalo de tempo, não dependem da "posição" desse intervalo no tempo, mas apenas do seu comprimento.

e com distribuição dos montantes das indemnizações

$$G = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i.$$

Este teorema permite assim que se passe imediatamente dos processos de risco relativos a k riscos independentes, para o processo de risco correspondente ao conjunto desses k riscos.

Mais uma vez não é difícil verificar (ver [2]) que, representando Y_t as indemnizações agregadas até ao momento fixo t, se Y_t segue uma distribuição de Poisson composta nos termos anteriormente indicados, então

$$E[Y_t] = \lambda t E[X]$$
$$V[Y_t] = \lambda t E[X^2]$$
$$\gamma_{Y_t} = \frac{E[X^3]}{(E[X^2]^3 \lambda t)^{-1/2}}$$

e a função geradora de momentos é

$$M_{y_t}(\alpha) = e^{\lambda t (M_x(\alpha)-1)}$$

com

$$E[X^\alpha] = \int_0^{+\infty} x^\alpha dG(x)$$

e

$$M_x(\alpha) = E[e^{\alpha x}].$$

(Relembre-se que Y_t é igual ao somatório das variáveis aleatórias X_{t_i}, as quais representam as indemnizações individuais que ocorreram até ao momento t, e também que o número dessas indemnizações é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro λt.)

(De modo particular, sendo $Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$, uma variável com distribuição de Poisson composta, de parâmetros λ_i e G_i , então, tem-se imediatamente que

$$E[\, e^{rY_i} \,] = e^{\lambda_i \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{rx} dG_i(x) - 1\right]}). \tag{4}$$

Seguindo uma orientação semelhante à adoptada quando foi apresentado o processo do número de indemnizações, também agora se vai concluir esta parte, relativa ao processo das indemnizações agregadas, apontando-se algumas limitações de ordem prática.

Tal como então, e como já foi salientado, também aqui o principal problema se encontra na identificação da função G, que traduz a distribuição dos montantes das indemnizações e, mais ainda, na conjugação desta função com o processo do número de ocorrências, para a obtenção da distribuição composta das indemnizações agregadas.

Notando que esta distribuição, seja $F(y_t)$, fornece, por definição, a probabilidade do acontecimento $Y_t \leq y_t$, e que este acontecimento pode concretizar-se, no intervalo considerado, se não houver nenhuma indemnização nesse intervalo, ou se houver uma única indemnização de valor inferior a y_t, ou se houver duas indemnizações cuja soma é inferior a y_t, ou se..., daqui resulta imediatamente quão complexa pode ser a determinação de $F(y_t)$.

Se se representar por $G_n(Y_t)$ a probabilidade condicional de que, dado que o número de indemnizações é exactamente igual a n, seja a soma das n indemnizações não superior a y_t, pode escrever-se que

$$Prob[Y_t \leq y_t] = \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) G_n(y_t) \tag{5}$$

onde $G_N(y_t) = Prob[X_{t_1} + \cdots + X_{t_n} \leq y_t]$ é a n-ésima convolução da função de distribuição $G(x)$.

Para além disto, outra questão relevante é o facto de em muitas carteiras, onde os riscos associados às maiores percas potenciais não estão "controlados" por nenhum resseguro, se tornar muito difícil a obtenção de uma representação fidedigna da própria distribuição dos montantes das indemnizações nessa região crítica. Este relativo desconhecimento deve, a todo o custo, ser ultrapassado, pois respeita àquelas indemnizações que podem pôr em perigo a permanência da empresa no mercado.

A actividade duma seguradora é, com propriedade, representada por um processo de risco, pois na sua essência *consiste* mesmo num processo de risco. Mas mais do que o fim de representar essa actividade, o estudo do processo de risco tem a missão de fornecer os elementos necessários ao cálculo dos prémios que se devem cobrar aos segurados e dos quais, ainda mais que das indemnizações, depende a sobrevivência da seguradora. Na secção imediata é abordado este ponto.

3.2 Princípios de cálculo de prémios

Anteriormente foi visto que para uma companhia seguradora, um risco é algo que, num dado período (0,t], suscita a cobrança dos prémios P_t, por um lado, e obriga eventualmente ao pagamento das indemnizações Y_t, por outro.

Quanto às indemnizações, foram já indicados os aspectos fundamentais relacionados com o seu tratamento na secção anterior. Relativamente aos prémios, os pontos a salientar são os que se apresentam de seguida.

O cálculo dos prémios está assente num princípio básico, segundo o qual o pagamento das indemnizações (em número e montante incertos) aos segurados, pode ser compensado se estes pagarem periodicamente determinadas importâncias fixas à companhia. Estas importâncias fixas pagas periodicamente são os prémios, como se sabe.

Partindo então deste princípio geral, é necessário encontrar alguma "regra" que permita a efectiva determinação do valor desses prémios e que seja considerada razoável, tanto pelo segurado como pela seguradora. Como os riscos relativamente aos quais existe a possibilidade de seguro, são riscos ditos económicos, não é surpreendente que essa "regra" seja também designada por princípio de decisão económica. Aliás, em princípio, admite-se que o contrato de seguro tem condições para ser celebrado, isto é, que existem condições vantajosas mútuas para as duas partes envolvidas, *quando* o prémio pedido pela companhia é não superior ao montante máximo que o segurado estaria disposto a pagar pelo seguro.

Pois bem, os princípios de decisão económica que determinam a fixação dos prémios por forma a que se atinja este equilíbrio desejável (e que são por isso também denominados princípios de equivalência) é que são os princípios de cálculo de prémios. Só que, evidentemente, não é toda e qualquer regra que se possa conceber que constitui um princípio de cálculo de prémios aceitável; existem propriedades convenientes que devem verificar-se para que haja de facto equivalência entre as prestações das duas partes. Essas propriedades, em traços muito gerais, impõem que:

- os prémios não devem ser calculados de forma tal, que seja vantajoso ao segurado repartir um mesmo risco por várias apólices;
- os prémios não devem ser calculados de modo a que um contrato que forneça uma cobertura maior do que um outro, tenha prémio inferior ao deste;
- o valor do prémio deve ser não inferior ao valor esperado das indemnizações que lhe correspondem;

- o valor do prémio não pode ser superior ao ínfimo do conjunto dos valores V para os quais se verifica que

$$Prob[\text{ indemnizações agregadas } \leq V] = 1.$$

Apesar destas serem propriedades cuja justeza não parece oferecer dúvidas, tanto para a companhia seguradora como para o segurado, o que é certo é que nem mesmo os princípios de cálculo de prémios mais comuns as satisfazem em todas as situações, como se irá ver. Essas princípios mais comuns são os seguintes:

1- O princípio do valor esperado

De acordo com este princípio, tem-se que

$$P_t = (1 + \alpha)E[Y_t], \quad \alpha > 0,$$

ou seja, o valor do prémio a receber no período (0,t], é igual ao valor esperado das indemnizações agregadas relativas a esse período, acrescido duma fracção α desse mesmo valor esperado. Nos seguros de vida é quase sempre o princípio adoptado.

Sundt [13] demonstra que das quatro propriedades enumeradas, este princípio apenas verifica as três primeiras.

2- O princípio do desvio padrão

Agora tem-se

$$P_t = E[Y_t] + \alpha\sigma_{yt}, \quad \alpha > 0$$

Este princípio é praticamente semelhante ao princípio precedente, com a diferença de que a parcela cobrada para além do valor esperado das indemnizações já não é uma fracção deste, mas sim do desvio padrão dessas indemnizações. É também um princípio muito utilizado, embora não verifique a segunda e a quarta propriedades.

3- O princípio da variância

Segue a mesma orientação dos dois anteriores e, por isso, vem

$$P_t = E[Y_t] + \alpha\sigma^2_{yt}, \quad \alpha > 0.$$

Não é tão comum como os princípios do valor esperado ou do desvio padrão e apenas satisfaz a terceira das quatro propriedades indicadas.

4- O princípio da utilidade nula

Considere-se uma função de utilidade, seja $u(x)$, tal que $u'(x) > 0$ e $u''(x) < 0$.

Se se representar por x_0 a riqueza inicial , então tem-se que o prémio calculado de acordo com este princípio é a solução da equação

$$u(x_0) = E[u(x_0 + P_t - Y_t)].$$

A justificação para que o princípio seja designado por princípio da utilidade nula é óbvia, pois o que se exige é que o prémio tenha um valor tal que a utilidade da riqueza inicial seja igual ao valor esperado da riqueza final, isto é, depois de feito o seguro (depois de recebidos os prémios e pagas as indemnizações).

Este princípio é, do ponto de vista teórico, muito interessante, mas tem o senão de levantar todas as questões habituais associadas à identificaçao da função de utilidade apropriada. Note-se, contudo, que se for escolhida uma função de utilidade exponencial

$$u(x) = \tfrac{1}{\theta}(1 - e^{-\theta x}), \quad \theta > 0,$$

que satisfaz as especificações indicadas e é relativamente aceitável, pelo menos na literatura, são verificadas as quatro propriedades indicadas. Mesmo assim, pode dizer-se que só raramente este princípio tem sido aplicado.

Antes de se concluir este ponto relativo ao cálculo dos prémios, apontem-se os habituais aspectos merecedores de especial destaque.

Como se disse, é conveniente e desejável que haja equivalência entre os prémios e as indemnizações que lhes correspondem, pois só nesse caso ambas as partes desejarão contratar. No entanto, se considerarmos qualquer um dos quatro princípios apresentados, é notório que o prémio parece sempre favorecer a seguradora, isto é, para além dos encargos previsíveis com o pagamento das indemnizações, o segurado tem que desembolsar uma parcela adicional (a chamada **carga**) para a qual, em princípio, não parece haver qualquer justificação. Há uma justificação: essa parcela adicional, quer seja calculada como função do valor esperado das indemnizações, quer da sua variância, ou de outra forma qualquer, destina-se a constituir uma margem de segurança, indispensável para cobrir eventuais alterações estocásticas no risco segurado.

Com efeito, é a companhia que está mais sujeita a sair prejudicada, no caso de se registarem mudanças quanto às expectativas que haviam sido formadas em relação ao risco e, portanto, é perfeitamente natural que se previna contra isso.

O coeficiente de carga α escolhido nos princípios **1**,**2** e **3** e a função de utilidade $u(x)$ escolhida no princípio **4**, traduzem este procedimento e podem inclusivamente ser consideradas variáveis de decisão, fundamentais na estratégia a seguir pela seguradora.

Um esclarecimento que se deve fazer, é que estas cargas *não* incluem as chamadas **cargas administrativas**, as quais se destinam a providenciar os meios para que a companhia possa fazer face aos custos decorrentes do seu funcionamento e também para que possa obter um lucro positivo.

A fixação das cargas administrativas não tem, naturalmente, nada a ver com as características estocásticas dos riscos, estando antes mais dependente de aspectos relacionados com o tipo de gestão que é seguido e até, por vezes, com normas legais.

Outro aspecto interessante e que também está, de certo modo, ligado à questão do cálculo dos prémios, é o sistema de bonificações e de penalizações que vigora nalguns ramos, como por exemplo o ramo automóvel. Neste, como noutros ramos, cada companhia depara-se com uma situação que se caracteriza pelo facto de existir um elevado número de apólices associadas a riscos que - pelo menos à primeira vista

- apresentam características muito semelhantes entre si, formando um conjunto onde existe uma certa homogeneidade. É normal portanto que, em princípio, os prémios cobrados aos titulares dessas diferentes apólices sejam bastante aproximados.

O problema é que, inevitavelmente, a homogeneidade nunca é completa, e à medida que o tempo vai passando e as características próprias de cada risco se vão revelando, é conveniente compensar aqueles que produzem percas inferiores àquilo que seria esperado (e em que assentou o cálculo do prémio) e penalizar de forma correspondente os que se encontram na situação oposta, sendo assim de alguma forma reposto o equilíbrio *"individual"*. Esta é a missão do sistema de bónus e de penalizações.

3.3 A probabilidade de ruína

Sundt [14, pág. 79], referindo-se à probabilidade de ruína, afirma que

> "never have so many people written
> so much about such a small probability".

Seja a afirmação verdadeira ou não, o facto é que a eventualidade da ruína é uma preocupação constante de qualquer seguradora (basta aliás ver a relutância com que qualquer indemnização é paga) pelo que, mesmo depois de definidos os objectivos empresariais (lucro, crescimento no mercado, alargamento dos campos cobertos, etc.), as acções por ela desenvolvidas nunca poderão perder de vista a probabilidade de ruína e sua conservação em níveis tão reduzidos quanto possível. [Relembre-se até que é fundamentalmente o desejo de controlar a possibilidade da ocorrência da ruína, que induz as companhias a ressegurarem parte da sua carteira.]

Começando por se definir o conceito de **reserva de risco** ao fim de um certo período t, $(t > 0)$ tem-se que essa reserva , seja $U(t)$, é expressa pela igualdade

$$U(t) = u_0 + ct - Y_t \tag{6}$$

onde:

- $u_0 = U(0)$ é o valor da reserva disponível no momento inicial (momento zero), talvez como resultado de operações passadas;
- $ct = P_t$ é o montante recebido de prémios no período (0,t] e que se supõe serem pagos continuamente a uma taxa constante $c > 0$;

- Y_t são as indemnizações agregadas no intervalo (0,t].

É claro que existem muitas outras parcelas que também vão afectar o valor de $U(t)$, como por exemplo os juros (positivos e negativos), as despesas correntes e os lucros distribuídos, mas, para simplificar, e porque não é usual considerá-las como variáveis, poderão ser ignoradas.

$U(t)$ é, claramente, uma variável aleatória (depende de $Y(t)$, que é uma variável aleatória) e , portanto, poderemos considerar o processo estocástico

$$\{U(t)\}_{t>0}$$

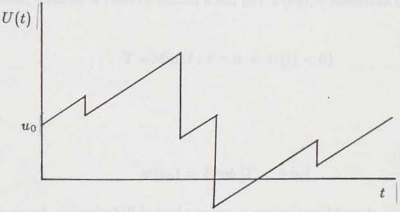
que representa a evolução da reserva de risco ao longo do tempo e o qual está intimamente ligado, como é óbvio, ao processo de risco

$$\{Y(t)\}_{t>0}.$$

É até usual, que se chame por vezes ao processo da reserva de risco, também processo de risco, agora entendido basicamente como sendo a diferença entre os prémios cobrados e as indemnizações pagas.

Graficamente, uma representação típica do processo desse excedente tem a seguinte configuração.

FIGURA 2



Trajectória típica do processo da reserva de risco

Como a figura ilustra, a reserva vai aumentando de forma linear (com inclinação igual a c), excepto nos momentos em que ocorrem indemnizações, que a diminuem nos respectivos montantes. Também é imediato que se o montante inicial u_0 for aumentado ou reduzido de um determinado valor, isso reflectir-se-á no valor de $U(t)$ em todo o horizonte temporal, aumentando-o ou reduzindo-o de forma correspondente.

Outra constatação óbvia é a da possibilidade da reserva de risco se poder tornar negativa após a ocorrência de alguma indemnização. Pois bem, quando isto sucede pela primeira vez, diz-se que aconteceu a **ruína**. Deve contudo adiantar-se que embora muito perigosa, na prática uma situação de ruína não implica necessariamente a falência da companhia. Na verdade, algumas vezes, a ruína pode não ser tão definitivamente trágica como o próprio termo faz supôr, se, considerando todos os factores, os fundos da companhia podem afinal ser ainda positivos, ou, no mínimo, podem ser reconduzidos a um valor não negativo. Além disso, pode geralmente haver ruína num determinado ramo (mais uma vez, o ramo automóvel é um bom exemplo) e os outros ramos serem bastante lucrativos, acabando o excedente global por ser positivo.

Seja como for, é de todo vantajoso ter-se uma noção da probabilidade de ruína, isto é, da probabilidade de que a reserva $U(t)$ se torne negativa, ou, mais genericamente, de que se torne inferior a algum limite fixo (10 por cento do capital social, por exemplo) designado por **barreira de ruína**. Para se proceder à respectiva avaliação, pode partir-se de uma das quatro situações seguintes:

- 0 tempo é contínuo e o horizonte temporal considerado é infinito.

  Representando o momento em que a ruína ocorre por T, e a probabilidade de ruína, quando a reserva inicial é u_0, por $\psi(u_0)$, é imediato que

  $$T = \text{Min}\{t : t > 0 \ \text{ e } \ U(t) < 0\}$$

  e que

  $$\psi(u_0) = Prob\,[T < +\infty].$$

  Como se vê, a probabilidade de ruína é assim considerada uma função da reserva inicial, o que não é surpreendente se atendermos a que quanto maior (menor) for u_0, maior (menor) será a reserva de risco ao longo do tempo;

- O tempo é contínuo e o espaço temporal considerado é o intervalo finito (0,t]. Agora,

$$T = \text{Min}\{t : t \in (0,t] \text{ e } U(t) < 0\}$$

e

$$\psi(u_0, t) = Prob\ [T < t]$$

representa a probabilidade de ruína. Evidentemente que $\psi(u_0)$ é um majorante de $\psi(u_0, t)$;

- O tempo é discreto (o valor da reserva é avaliado apenas em certos momentos fixos) e o horizonte temporal considerado é infinito.

Tem-se

$$T = \text{Min}\{t : t = 1, 2, \ldots \text{ e } U(t) < 0\}$$

e

$$\psi(u_0) = Prob\ [T < +\infty];$$

Finalmente,

- O tempo é discreto e o horizonte temporal é finito (o estado do processo é avaliado nos momentos 1,2...,n).

Vem

$$T = \text{Min}\{t : t = 1, 2, \ldots, n \text{ e } U(t) < 0\}.$$

e

$$\psi(u_0, n) = Prob\ [T < n].$$

Também em tempo discreto se verifica que $\psi(u_0)$ é um majorante de $\psi(u_0, n)$. Além disso, não oferece igualmente dúvidas que $\psi(u_0, t) \geq \psi(u_0, n)$, desde que $t \geq n$, pois a abordagem discreta ignora a probabilidade de que $U(t)$ se torne inferior a zero nos momentos que medeiam as revisões do processo.

E estas são, pelo menos teoricamente, as alternativas possíveis.

Do ponto de vista prático, e qualquer que seja a perspectiva adoptada, é indubitável que se torna muito difícil calcular um valor credível para esta probabilidade. Na verdade, sendo por definição igual à probabilidade de que a companhia, algures no futuro, fique com uma reserva inferior à barreira de ruína, e sendo os cálculos efectuados essencialmente com base no conhecimento presente, é natural que qualquer valor que resulte desses cálculos seja sempre encarado com alguma relutância.

Com respeito a isto, Borch [4, pág. 74] escreve

> "However, in spite of all the elegant mathematics which usually is displayed to calculate the probability of ruin, this is a rather sterile result..."

Apesar destas objecções, é absurdo pensar que em qualquer companhia racionalmente gerida não se desenvolvam esforços no sentido de que a respectiva probabilidade de ruína seja calculada (mesmo havendo a consciência de que o valor que é obtido na maior parte das vezes não passa de uma aproximação). [2] Da conjugação desses esforços, tanto teóricos como práticos, realizados ao longo do tempo, é que foi possível extrair vários resultados, que, em maior ou menor grau, deram o seu contributo para a resolução do problema .

Um dos mais importantes, pela sua aplicabilidade, é o que consta do teorema que se segue (cuja demonstração está, por exemplo, em [5]).

Teorema 2 *Para $u_0 \geq 0$ e admitindo que o processo das indemnizações agregadas é um processo de Poisson composto, tem-se que*

$$\psi(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E[e^{-RU(T)}|T < +\infty]}, \tag{7}$$

sendo R a única raiz positiva da equação

$$E[e^{r(Y-P)}] = 1. \tag{8}$$

[2] muito embora, tanto quanto se sabe, as seguradoras portuguesas ainda não mostrem grande empenho nisso.

Esta é uma igualdade realmente importante, não por permitir a determinação da probabilidade de ruína -o que só em situações muito específicas é possível-, mas sim por permitir que se estabeleçam intervalos onde, se Y e P estiverem correctamente explicitados, há a certeza de estar incluído o verdadeiro valor dessa probabilidade.

Com efeito, o denominador da fracção acima, é calculado com base na probabilidade condicionada da reserva $U(T)$, dado que se verifica de facto que existe ruína, isto é, que T é finito, e regra geral não é possível avaliar explicitamente este termo. Se se notar, porém, que se há ruína em T, então $U(T)$ é um valor negativo, e que se $U(T)$ é um valor negativo, então o denominador da fracção é com certeza superior à unidade, logo, segue-se que

$$\psi(u) \leq e^{-Ru_0}.$$

E esta é a conhecida desigualdade de Lundberg, que fornece assim o modo de se obter um majorante credível para a probabilidade de ruína.

Mais ainda, se a função de distribuição $G(x)$, relativa ao montante das indemnizações, verificar $G(m) = 1$, para algum m finito, daqui resulta, dado T finito, que $U(T) \geq -m$, pois que antes de se atingir o momento T (da ruína) sempre se verificou que $U(t) \geq 0$ e a indemnização que conduziu à ruína não pode ser, pela hipótese estabelecida sobre a função G, superior a m. Tem-se então que

$$e^{-RU(T)} \leq e^{Rm}$$

pelo que

$$E[e^{-RU(T)}|T < +\infty] \leq e^{Rm}$$

e, logo,

$$\psi(u) \geq e^{-Ru_0}e^{-Rm} = e^{-R(u_0+m)},$$

desigualdade que fornece, por sua vez, um minorante para $\psi(u_0)$. É agora possível de uma forma relativamente expedita e segura, enquadrar o valor exacto da probabilidade de ruína. Segura, porque se assume que o processo das indemnizações agregadas foi bem modelizado estatisticamente -única circunstância onde se concebe como útil a aplicação destes resultados; relativamente expedita, porque na prática é complicado determinar R. A equação $E[e^{r(Y-P)}] = 1$ não é, na maioria das vezes (excepção feita quando $G(x)$ é a distribuição exponencial, por exemplo), resolúvel explicitamente, sendo necessário recorrer aos métodos numéricos adequados.

A terminar este ponto e, com ele, a rápida passagem pelos principais conceitos da teoria do risco que constitui esta primeira parte do trabalho, somente uma referência mais detalhada à relação existente entre a probabilidade de ruína e o resseguro.

Tendo em atenção a fórmula atrás obtida para a probabilidade de ruína, é claríssimo (e foi já salientado), que esta é tanto menor quanto maior for a reserva inicial u_0, sendo até expressa como uma função desta variável (que pode ser considerada uma variável de decisão). Mas se atendermos a que ocorre a ruína quando, pela primeira vez, a reserva de risco toma um valor negativo, e relembrando que, para além da reserva inicial, esta reserva de risco depende dos prémios cobrados e das indemnizações pagas, podem então considerar-se também como variáveis de decisão (das quais depende igualmente a probabilidade de ruína) o coeficiente de carga α, escolhido no cálculo dos prémios, e a política de resseguro a seguir, fortemente determinante das indemnizações a pagar.

Relativamente ao coeficiente de carga, Bowers [5] demonstra que, se este for não positivo, então a ruína é certa, quaisquer que sejam as reservas iniciais. Daqui se infere que o valor apropriado para esta variável terá que resultar basicamente da ponderação entre o desejo, por parte da companhia, de que ele seja tão grande quanto possível, e a necessidade, por exigência do mercado, de o manter a níveis competitivos com os das outras seguradoras.

Quanto à política de resseguro, foi logo no início do trabalho bem acentuado que a compra de resseguro tem que ser necessariamente um compromisso entre os ganhos esperados, por um lado, e uma maior segurança, por outro. Porque as coisas se passam assim, qualquer seguradora, à partida, pretende apenas ressegurar o que for estritamente indispensável para modificar a distribuição das suas indemnizações agregadas, de tal modo que seja satisfeito um determinado nível de segurança. Como é lógico, de entre todas as possíveis soluções de resseguro que permitem alcançar esse grau de segurança, será escolhida a que corresponde a um maior lucro esperado.

Subjacente a tudo isto está, todavia, a questão de como é que se há-de medir a segurança da companhia. E, naturalmente, a primeira tentação seria propôr para esse fim a probabilidade de ruína, que se afigura como o mais transparente dos indicadores. [Repare-se como é elucidativo, em termos de segurança, exigir que a probabilidade de ruína não exceda , por exemplo, 0.01].

Se na realidade se pudesse utilizar esta medida, o problema consistiria afinal em identificar todas as possíveis acções de resseguro que restringissem a probabilidade de ruína a valores não superiores ao limite estabelecido (uma centésima, no exemplo), e em escolher a que produzisse um maior lucro esperado. Só que, já o sabemos, o cálculo de $\psi(u_0)$ não é acessível, e o mais viável será optar por proceder à avaliação dos efeitos das diferentes alternativas de resseguro sobre os níveis de segurança da companhia, através de outro indicador também conveniente.

Uma escolha possível será avaliar esses efeitos através da raiz R da equação (já apresentada) $E[e^{r(P-Y)}] = 1$ que, recordando a desigualdade de Lundberg, tem uma estreita ligação com a própria $\psi(u_0)$.

R costuma designar-se por **coeficiente de ajustamento** e, em termos básicos, o que se puder aferir sobre este coeficiente, pode estender-se à probabilidade de ruína, em particular no que diz respeito aos efeitos que tem sobre esta um determinado contrato de resseguro.

Segundo Bowers [5], pode inclusivamente entender-se que a denominação "coeficiente de ajustamento" advém do facto de que, se com um certo acordo de resseguro não se consegue que R atinja um valor suficientemente elevado (tendo em vista a probabilidade de ruína desejada), então esse acordo necessita de ser *ajustado* até que R tome realmente um valor aceitável. No final da parte do trabalho que se segue, vai precisamente fazer-se uma breve síntese de algumas soluções apresentadas por vários autores para este problema da escolha das "formas óptimas" de resseguro.

PARTE II

Resseguro:

Princípios Práticos e Alguns Resultados Teóricos

1 Tipos de Resseguro

Antes de começarmos propriamente pela apresentação dos contributos mais relevantes que foram surgindo para resolver o problema do resseguro, é indispensável que seja feita uma descrição das variantes que se oferecem às seguradoras, nomeadamente em termos dos tipos das coberturas existentes e das vantagens e desvantagens que caracterizam cada uma delas.

Foi já por várias vezes referido que a razão fundamental que induz uma companhia a recorrer ao resseguro é o receio de que, com a sua actual carteira de apólices, ou com a previsível evolução desta (designadamente se está em curso uma política de expansão), a reserva de risco desça abaixo da barreira de ruína, ficando assim comprometida a sua sobrevivência. Mais concretamente, pode acrescentar-se que esse receio provém das três seguintes espécies de perigos:

- a possibilidade de que ocorram grandes indemnizações em alguns riscos individuais;
- a possibilidade de que ocorram flutuações desfavoráveis muito pronunciadas no número e no montante médio das múltiplas pequenas e intermédias indemnizações;

  e, finalmente,
- a possibilidade de que surjam várias indemnizações provocadas por uma única ocorrência.

Considerando cada uma destas três possibilidades, sob as quais se pode eventualmente esconder a insolvência, é compreensível que o tipo de resseguro que melhor protege uma seguradora contra os efeitos duma delas, não seja já adequado para a proteger dos efeitos das outras, e que portanto existam diferentes tipos de resseguros consoante a natureza do risco que se procura ressegurar, como de facto acontece.

Começando por considerar o primeiro caso (grandes indemnizações provocadas por riscos individuais), a experiência tem demonstrado que é nos ramos onde existe uma maior heterogeneidade entre os vários riscos que tais ocorrências se dão com uma maior frequência. Esta heterogeneidade encontra-se em praticamente todos os ramos do seguro de propriedades, muito especialmente no seguro contra incêndios, onde podemos constatar que as somas seguradas variam entre as poucas centenas de contos (um barracão, por exemplo) e as centenas de milhares de contos (um complexo industrial, também por exemplo).

Assim sendo, tudo indica que o tipo de resseguro mais apropriado para atenuar as possíveis consequências duma situação com as características referidas, deve ser sempre orientado para *os riscos individualmente considerados* e para as respectivas indemnizações potenciais.

No fundo, neste caso, o objectivo que se procura atingir com o resseguro consiste em tentar reduzir a heterogeneidade existente no interior de cada ramo, o que é feito pelo nivelamento dos riscos mais perigosos. Existem duas formas diferentes de o conseguir.

A primeira, é o chamado **resseguro do excedente** e caracteriza-se pelo seguinte: à partida, a seguradora fixa o limite máximo que está disposta a reter de cada apólice, isto é, fixa o montante, dentre a soma total segurada em cada apólice, pelo qual está disposta a ficar responsável. De seguida, analisa as apólices em causa uma a uma e retém (não ressegura) todas aquelas cuja soma segurada não excede o limite fixado. Das restantes, quer dizer, daquelas cuja soma segurada é superior a esse limite, a companhia retém apenas o montante que com ele coincide e cede o *excedente* à resseguradora. Daí procede a designação deste tipo de resseguro.

Como se vê, o conjunto das apólices submetidas a este processo fica efectivamente bastante homogéneo, pois após o resseguro tudo se passa como se não houvesse nenhuma apólice com soma segurada superior ao limite estabelecido: todos os excedentes que o ultrapassam são transferidos para a resseguradora.

Naturalmente que, apólice a apólice, a seguradora acaba por ficar responsável por uma dada proporção da soma segurada, proporção essa que varia consoante o montante segurado, ficando a resseguradora responsável pela proporção restante. Os prémios são divididos por uma e por outra, segundo estas proporções, e o mesmo se passa relativamente ao pagamento das indemnizações que vierem a ocorrer. Do ponto de vista da concepção, trata-se de um procedimento bastante simples mesmo quando, como é corrente encontrar-se, se tem mais de uma resseguradora envolvida no processo. É que, de facto, é habitual, especialmente nos riscos onde a soma segurada é avultada, que não seja possível encontrar uma única resseguradora disposta a responsabilizar-se pelo resseguro de todo o excedente, mas apenas por um certo número de **linhas** (por definição, uma linha é igual à própria retenção da seguradora directa), sendo então necessário recorrer a uma segunda ou terceira resseguradoras até que todo o excedente de perca fique ressegurado. Já se sabe que a responsabilidade de cada uma das companhias intervenientes é directamente proporcional ao número de linhas que retém.

Pois apesar desta simplicidade conceptual, que se mantém mesmo quando há várias resseguradoras envolvidas, o principal inconveniente que o resseguro do excedente envolve encontra-se precisamente no aumento que provoca nos custos administrativos. Na prática, isto deve-se à necessidade que as seguradoras têm de calcular as proporções retidas e cedidas, de calcular a partilha dos prémios, de calcular as participações relativas nas indemnizações, e tudo isto individualmente para cada risco ressegurado, o que constitui uma apreciável fonte de custos.

Além disso, com o resseguro do excedente, sempre que se verifica a ocorrência de uma indemnização de reduzido montante no âmbito de um dos riscos ressegurados, também nesses casos a resseguradora é chamada a participar no pagamento segundo a proporção por ela retida, o que acarreta encargos administrativos que a dimensão da perca não justifica. Um pequeno exemplo, ilustra este ponto.

Suponha-se uma ourivesaria que faz um seguro contra roubos no valor de 25000 contos. A seguradora que subscreve este risco retém apenas 1000 contos, o que corresponde a 0.04 da soma segurada e ressegura o excedente (24000 contos ou 0.96 dessa soma). Pois bem, se houver um roubo de jóias no valor de 10000 contos, a seguradora pagará uma indemnização de 400 contos, a resseguradora pagará os restantes 9600 contos e o resseguro cumpriu cabalmente a sua missão. Mas se houver um assalto no qual os ladrões apenas partam uma montra pequena e não consigam roubar mais do que um relógio barato, tudo avaliado em 10 contos, a resseguradora vai ter do mesmo modo que pagar os 9600 *escudos* que lhe competem, quando provavelmente seria mais simples para a seguradora suportar sozinha essa perda.

Verifica-se assim que o resseguro do excedente, embora permita uma certa homogeneização dos ramos onde a heterogeneidade se revela perigosa, acaba por abranger muitas indemnizações que não necessitam de resseguro, o que ainda tem a consequência natural de agravar os prémios pagos à resseguradora.

Na sequência desta constatação, surgiu então um segundo tipo de resseguro, o **resseguro do excesso de perca**, o qual constitui a segunda das formas existentes para amenizarem os efeitos dos riscos mais perigosos.

Este tipo de resseguro baseia-se na hipótese implícita de que só os grandes riscos podem provocar grandes percas, pelo que a carteira da resseguradora ficaria protegida das consequências de tais percas, se todos os grandes riscos - e o que se entende por *grande risco* varia de situação para situação - fossem resseguradas.

Esta é também a filosofia do resseguro do excedente, mas agora a perspectiva vai ser diferente: não é já a soma segurada (isto é, a mera possibilidade da ocorrência de grandes indemnizações) que vai ser tomada como base, mas sim o próprio montante das indemnizações que ocorram. O que se procura não é cobrir os grandes riscos com grandes percas potenciais, mas sim impedir directamente que se tenham que pagar grandes indemnizações, independentemente da sua proporção em relação à soma segurada.

O modo como o resseguro do excesso de perca funciona pode resumir-se da seguinte forma: de início, a seguradora começa por fixar já não o limite máximo que está disposta a reter da soma segurada, mas sim o limite máximo que está disposta a pagar por cada indemnização que ocorra. De seguida, transfere todos os pagamentos para além desse montante para a resseguradora (ou para as resseguradoras), que fica assim responsável pelo pagamento do excesso de perca registado.

Em síntese, tem-se que a seguradora pagará na sua totalidade as indemnizações cujo valor não exceda o limite fixado (**o pleno**), mas daquelas que o excederem pagará apenas o correspondente a esse pleno, pagando a resseguradora o que faltar.

O que é importante notar é que não só a seguradora continua a não pagar em caso algum mais do que um certo valor conhecido, mas também que a resseguradora não será envolvida nos processos referentes a indemnizações com valores pouco consideráveis, como se pretendia. Tal como foi visto para o resseguro do excedente, também é normal que o resseguro do excesso de perca tenha que ser estendido a várias resseguradoras, sendo a responsabilidade de cada uma delas limitada, inferiormente, pela resseguradora que a antecedeu no processo de resseguro e, superiormente, por ela própria. As indemnizações serão repartidas por todas segundo o mesmo esquema que se aplica quando se tem apenas uma resseguradora envolvida.

O maior inconveniente que se aponta à aplicação deste tipo de resseguro, encontra-se no cálculo do prémio a pagar à resseguradora (ou às resseguradoras, se for esse o caso): ao contrário do que sucede no resseguro do excedente, onde existe uma proporcionalidade bem determinada na cobertura dos riscos por parte desta(s) e da seguradora, no resseguro do excesso da perca já não se encontra qualquer proporcionalidade e o prémio cobrado pela seguradora já não pode pura e simplesmente ser repartido entre ela e a resseguradora de forma imediata.

Agora a resseguradora é forçada a calcular o prémio que há-de cobrar, baseando-se noutros elementos para além do prémio que existe para ser repartido, ao mesmo tempo que procurará garantir nesse cálculo a obtenção de um certo lucro. Muito provavelmente será obrigada a utilizar um dos princípios de cálculo de prémios vistos, o que exige o conhecimento estatístico do comportamento das indemnizações. Contudo, ao investigar a forma como na prática esse prémio *é calculado*, Gerathewohl [10] identifica fundamentalmente dois processos que, em rigor, não se ajustam perfeitamente a nenhum daqueles princípios.

O primeiro desses métodos é, segundo o autor, pouco utilizado, e o prémio de resseguro será uma fracção maior ou menor do prémio cobrado directamente pela seguradora, consoante as apólices resseguradas estejam mais ou menos expostas à ocorrência de indemnizações que excedam o pleno fixado no contrato. A avaliação desta maior ou menor exposição dos riscos é feita exclusivamente através da análise da soma segurada em cada apólice coberta pelo resseguro, e da experiência passada sobre indemnizações pagas anteriormente no âmbito de apólices com características semelhantes às que estão a ser resseguradas.

Uma vez esta avaliação feita, o prémio que a seguradora cobrou relativamente aos riscos que estão incluídos no presente contrato de resseguro, irá então ser repartido entre ela e a resseguradora, respeitando as mesmas proporções que se verificaram no passado quando se dividiram entre uma e outra as indemnizações suscitadas por riscos semelhantes aos que agora se consideram.

Do ponto de vista teórico, é de facto um método razoável; do ponto de vista da aplicação prática revela alguns pontos fracos, nomeadamente a insuficiência da soma segurada como único critério para a avaliação da maior ou menor possibilidade de ocorrência de grandes indemnizações e também, muitas vezes, a falta de dados suficientes para se poder estimar satisfatoriamente a fracção do prémio inicial que se destina a pagar o resseguro. Provavelmente serão estas as causas que justificam a sua pouca utilização.

Quanto ao segundo processo, o cálculo do prémio de resseguro vai basear-se fundamentalmente no prémio de risco que resulta de estatísticas passadas sobre as apólices resseguradas, o que permite que seja detectada a evolução verificada e a sua possível tendência futura.

Este segundo método, que, ao contrário do anterior, é [10, pág. 258] "particularly important in modern reinsurance practice", tem como hipótese básica a de que, no longo prazo, existe uma relação constante entre o prémio associado ao conjunto das apólices que provocam indemnizações acima do pleno e o prémio global associado a todo o colectivo resseguado, pelo que qualquer desvio que se verifique no comportamento das indemnizações a pagar, em relação à média estatística do passado recente (quatro ou cinco anos), é completamente aleatório.

A aplicação deste método não exige, portanto, senão uma pequena base estatística e é no geral bastante simples, como se mostra no exemplo seguinte (extraído de [10], pág. 258).

Exemplo:

Considere-se que, relativamente a um determinado conjunto de apólices, se conhecem os dados que figuram no quadro seguinte:

Ano	P_t	*N*	*z*	*Perc.*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
69	48	6	1.48	3.1
70	52	6	1.04	2.0
71	55	4	.825	1.5
72	61	2	2.44	4.0
73	60	1	1.36	2.0
69 – 73	284	19	7.145	2.5

onde:

- (1) é a coluna referente aos anos precedentes que se estão a considerar;
- (2) é a coluna referente aos prémios totais cobrados pela seguradora em cada um desses anos relativamente às apólices em causa;
- (3) é a coluna referente ao número de indemnizações que, em cada ano, excederam o pleno fixado (que é igual a 100 000 marcos alemães);
- (4) é a coluna referente ao montante agregado destas indemnizações;
- (5) é a coluna referente à percentagem dos montantes da coluna (4) em relação aos montantes da coluna (2) (todos os valores estão em 10^6 marcos alemães).

Ao aplicar-se o segundo método para se estabelecer o prémio que em 1975 deverá ser cobrado pelo resseguro deste colectivo, pode então admitir-se que o global das percas acima de 100 000 marcos situar-se-á presumivelmente entre 1.5 por cento e 4 por cento dos prémios globais provenientes do colectivo nesse ano, o que significa que a percentagem média de 2.5 por cento, aplicável desde 1969 até 1973, pode também ser tomada para o cálculo do prémio básico de resseguro em

1975. Ainda que depois se venha a constatar que a verdadeira percentagem é inferior a 1.5 ou que é superior a 4, qualquer dessas situações será considerada como uma flutuação aleatória.
(Um exemplo da aplicação do primeiro método apresentado pode também ver-se em [10], págs. 298-300, o qual não se transcreve devido à sua dimensão e à reduzida aplicabilidade do método em questão.)

O principal inconveniente que se apresenta à utilização deste segundo processo, encontra-se no facto de que para além das flutuações de natureza aleatória, que são as únicas consideradas, existem alterações no comportamento das indemnizações que são de natureza cíclica (os ciclos económicos) ou até tendencial (os salários, ou os preços), que podem obrigar a várias fases de cálculo até que o cálculo do valor "exacto" do prémio tenha sido atingido. Isto passa por uma análise crítica das estatísticas disponíveis e pelo seu ajustamento até que nelas estejam incluídos todos os factores significativos.

Estes são os tipos de resseguro vocacionados para protegerem as seguradoras do perigo de uma ocasional grande indemnização originada por um particular risco. Só que, como vimos, não são somente as grandes percas que requerem a utilização do resseguro; também na possibilidade de se verificarem aumentos inesperados no número e no montante da maioria das pequenas e médias indemnizações há o risco da solidez das seguradoras ser posta em causa. Primeiro, pela sua generalidade, porque tanto afecta os ramos onde não existe homogeneidade como aqueles onde ela existe, e depois porque pode ser provocado tanto por desvios de natureza meramente aleatória, como pelo aparecimento de novos padrões de comportamento dos factores de risco relevantes.

Por exemplo, no ramo automóvel, Invernos particularmente chuvosos ou com nevoeiros prolongados são desvios de natureza aleatória causadores de um aumento do número de acidentes. Se, paralelamente, há um aumento no número de condutores principiantes segurados, as condições de risco do ramo são alteradas também de modo desfavorável e toda esta conjugação de elementos adversos à seguradora tem que ser neutralizada.

O tipo de resseguro que será para isso mais àdequado, já não deve portanto orientar-se tanto para os riscos individuais como o resseguro do excedente ou do excesso de perca, mas mais para todo *o conjunto* de apólices que estão sujeitas a essas influências negativas. Existem, também aqui, duas formas diferentes de resolver a questão.

A primeira, é o chamado resseguro do tipo quota parte. Trata-se, como o resseguro do excedente, de uma forma de resseguro proporcional e consiste muito simplesmente nisto: para uma determinada classe de apólices (e qualquer que seja a soma segurada em cada uma delas), a companhia retém por apólice uma certa fracção da soma segurada e cede a parte restante. É claro que os correspondentes prémios e indemnizações são também divididos entre a seguradora e a resseguradora, de acordo com as fracções dos riscos retidas por cada uma.

A diferença fundamental entre o resseguro do tipo quota parte e o resseguro do excedente, é que neste o que se fixa é o *montante absoluto* da soma segurada a reter, e no resseguro do tipo quota parte é fixada logo a *parte* dessa soma a ser retida.

O resseguro do tipo quota parte oferece assim não só a vantagem de reduzir as percas potenciais da companhia quando há as referidas alterações desfavoráveis generalizadas, mas ainda, porque se destina especificamente aos ramos sujeitos a flutuações acima do normal, contribui para um maior equilíbrio entre os seus vários ramos.

A segunda é o chamado **resseguro do tipo "stop loss"**. O resseguro do tipo "stop loss" é não proporcional - como o resseguro do excesso de perca - e destina-se a impedir que o total das indemnizações que a companhia irá pagar no âmbito de um determinado conjunto de apólices, num certo período, ultrapasse um limite máximo estabelecido (por exemplo, 75 por cento dos prémios recebidos dessas apólices no mesmo período). A resseguradora (ou as resseguradoras, pois também aqui -e com maiores razões- pode acontecer que seja necessário recorrer aos serviços sucessivos de várias resseguradoras), naturalmente, fica responsável pelo pagamento de tudo quanto exceder este limite. Tem-se assim que no extremo (e pelo menos teoricamente), toda a carteira de uma seguradora poderia ser coberta por um acordo deste tipo, mas, tanto quanto se sabe, isso nunca aconteceu.

O prémio que a resseguradora cobra por esta cobertura é calculado com base na previsão dos pagamentos que irá efectuar, constituindo esta previsão o principal factor contrário à utilização do resseguro do tipo "stop loss", dada a dificuldade de se caracterizar rigorosamente a cauda da distribuição das indemnizações agregadas. Na prática, começa-se por uma análise do que aconteceu em anos anteriores e procura, a partir daí, determinar-se qual a possibilidade de que as indemnizações agregadas dos riscos ressegurados excedam o limite estabelecido no contrato de resseguro, bem como o montante aproximado do excesso. Num curto parágrafo sobre a eventual aplicação de algum princípio matemático, Gerathewohl [10, pág. 339] mostra-se deveras desanimador. Diz ele que

> "Although mathematical calculation models have been developed for stop loss covers, they are not of any practical significance since with the existing systems of data acquisition direct insurers are hardly ever able to supply the data required."

Em conclusão, pode dizer-se que este tipo de resseguro é mais utilizado só naqueles ramos onde a variação nos montantes das indemnizações é de tal forma "descontrolada", que se torna de facto necessário mantê-la debaixo de certos limites. Exemplo de ramos com estas características são os que estão ligados às catástrofes naturais: queda de granizo, terramotos, enxurradas, etc.

Finalmente, vai referir-se qual a forma de resseguro mais ajustada a impedir os efeitos da acumulação de várias indemnizações provenientes de um único acontecimento, que é a última das três situações enumeradas no início da secção.

Como foi visto quando se abordou o ponto relativo ao processo de risco, as companhias seguradoras assumem que os riscos individuais que constam da sua carteira podem ser considerados independentes uns dos outros, bem como as respectivas indemnizações. Isto não é sempre verdade: um incêndio numa casa pode espalhar-se a outras habitações e nada impede que estejam todas seguras pela mesma companhia; o mesmo pode acontecer com dois navios que colidem e numa infinidade de outras situações análogas.

O problema de tais ocorrências é que, ao gerarem várias indemnizações simultaneamente, podem infligir às seguradoras percas severas e inesperadas. A melhor maneira de garantir que isto não aconteça, será recorrer a um resseguro do tipo excesso de perca com características especiais. Em vez de se ressegurar o risco associado a uma certa apólice, o que se ressegura é o risco inerente à realização de um dado acontecimento, e aqui é que está o ponto fraco desta forma de resseguro. Enquanto que aquilo que se considera uma ocorrência no resseguro do excesso de perca, relativo a um particular risco, decorre automaticamente do que vem estabelecido na apólice, uma ocorrência no sentido que aqui está em causa tem que ser definida especificamente no contrato de resseguro e não é fácil fazê-lo com a desejável precisão. Quanto maior a área coberta e mais longo o período entre a primeira e a última indemnizações causadas pelo mesmo acontecimento, mais complicado se torna provar que se trata de uma mesma ocorrência. Em última análise, cada caso concreto terá que ser avaliado com base nas próprias circunstâncias envolvidas.

Em suma, e abstraíndo agora de qualquer consideração de ordem prática, podem resumir-se os quatro tipos de resseguro existentes duma forma mais esquematizada, que se apresenta a seguir. Em cada caso, vai considerar-se que existe uma só resseguradora envolvida no contrato, pois a generalização aos casos em que se tem mais do que uma resseguradora -o que pode acontecer nos resseguros do excedente e do tipo excesso de perca e "stop loss"- é uma mera repetição deste.

- **Resseguro do excedente:**

  A seguradora cede uma parte da soma segurada e retém a outra parte. Os prémios e o pagamento das indemnizações são divididos entre ela e a resseguradora segundo o princípio "pro rata", isto é, se admitirmos que Q é o montante segurado e R o montante retido pela seguradora, se ocorrer uma indemnização igual a x, a seguradora paga

  $$\frac{R}{Q}x$$

  e a resseguradora paga

  $$\frac{Q-R}{Q}x.$$

  Se P for o prémio, a seguradora conserva

  $$\frac{R}{Q}P$$

  e à resseguradora cabe

  $$\frac{Q-R}{Q}P;$$

- **Resseguro do excesso de perca:**

  Por cada indemnização que exceda um valor fixo M (o pleno) a resseguradora paga o respectivo excesso. Isto significa que se uma indemnização tem valor x, a seguradora paga

  $$\begin{cases} x \ , & se \quad x \leq M \\ M \ , & se \quad x > M \end{cases}$$

  A resseguradora paga 0, se $x \leq M$ e paga $(x - M)$ se $x > M$.

  O prémio a pagar à resseguradora será calculado, em princípio, de acordo com qualquer um dos princípios conhecidos. (Rever, a este respeito a observação da página 32).

- **Resseguro do tipo quota parte:**

  Por cada conjunto de apólices que se considere, é determinada uma percentagem fixa a: a resseguradora paga essa percentagem de cada uma das indemnizações que ocorram no âmbito das apólices resseguradas e cobra a mesma percentagem dos respectivos prémios.

  Quer isto dizer que, se existe uma indemnização a pagar de valor x e um prémio a receber de valor P, então a seguradora paga ax e recebe aP.

  A resseguradora, por seu lado, paga $(1-a)x$ e recebe $(1-a)P$;

- **Resseguro do tipo "stop loss":**

  Com base num conjunto de apólices (no limite, igual a toda a carteira da seguradora), é definido o máximo (L) que esta pagará de indemnizações aos seus possuidores nos mesmos termos em que se define o resseguro de excesso de perca com base num único risco. Deste modo; se z for o acumulado das indemnizações provocadas por todas essas apólices no período a que se refere o contrato, tem-se que a seguradora paga

$$\begin{cases} z \ , & se \quad z \leq L \\ \\ L \ , & se \quad z > L \end{cases}$$

  A resseguradora paga 0, se $z \leq L$ e paga $(z-L)$ se $z > L$. O prémio que vai receber também tem que ser calculado aplicando-se algum dos princípios conhecidos.

E estes são os tipos de resseguro a que as seguradoras podem recorrer para fazerem face às diferentes necessidades que as respectivas carteiras suscitam. O ênfase dado à sua apresentação resulta da convicção de que, apesar de serem conceptualmente noções muito simples, constituem o fundamento de tudo o que se relaciona com resseguro e portanto também deste trabalho. É ainda por esta razão que seguidamente irá ser visto, embora só superficialmente, o "modus operandum" do mercado de resseguro, pois é bastante esclarecedor de muitos aspectos que não podem ser ignorados (e por mais teórico que se deseje o estudo destas questões).

Antes disso, contudo, uma última referência: nos resseguros proporcionais (do excedente e do tipo quota parte) é prática seguida que a resseguradora pague à companhia cedente uma *comissão de resseguro*. Esta comissão é expressa como uma proporção dos prémios por aquela recebidos e tem de certa forma um paralelismo com as comissões pagas pelas seguradoras aos seus próprios angariadores. Em princípio, o seu valor deve ser suficiente para cobrir os custos que a seguradora directa suporta com a obtenção e gestão dos riscos cedidos, ajustada pelas expectativas da resseguradora em relação ao lucro que o contrato lhe proporcionará. Quando os riscos se apresentam à partida muito lucrativos, é bastante comum que as resseguradoras procurem competir umas com as outras oferecendo comissões de resseguro elevadas, o que permite à companhia cedente aumentar o seu lucro esperado. (Várias fórmulas para o cálculo do montante da comissão de resseguro podem encontrar-se em [7, pág. 87 e ss.] e [10; pág. 246 e ss.].)

1 Tipos de contratos de resseguro

Desde que a prática mercantil se começou a expandir, que praticamente todos os bens e serviços passaram a ter *o seu* mercado: o mercado automóvel, o mercado dos cereais, o mercado dos têxteis... e, também, o mercado do seguro e resseguro.

Cada um destes mercados tem as suas leis e formas de funcionamento próprias e, particularmente no mercado de resseguro, as transacções são realizadas de um modo tão característico que, sem se ter pelo menos uma ligeira ideia a seu respeito, não é possível entender bem as questões teóricas que o resseguro levanta.

Tradicionalmente, "o mercado é uma arena para trocas potenciais" (Philip Kotler), onde a procura e a oferta se encontram e desse encontro resultam as transacções sobre as quais os que oferecem e os que procuram chegam a acordo. Também no mercado do resseguro as coisas se passam assim, mas devido ao carácter específico do bem em causa e ao círculo de certa forma restrito de agentes que nele intervêm (embora não do ponto de vista geográfico, deve dizer-se), existem certas formas peculiares de realização dos contratos que é necessário conhecer.

A forma mais antiga é a forma "clássica", isto é, as seguradoras apresentam os riscos que desejam ressegurar no mercado, as outras companhias, depois de os examinarem (e se estiverem interessadas em ressegurá-los), fazem as suas propostas e, eventualmente, chegarão a um acordo. Como à partida não há de facto nada que obrigue a seguradora a ceder o risco, e qualquer das resseguradoras é livre de o aceitar ou não, diz-se que este é o método *facultativo* de colocação de resseguro e, aparentemente, seria o método mais razoável, mas só aparentemente.

Na verdade, o método facultativo arrasta dois grandes inconvenientes: o primeiro, reside nos custos administrativos que envolve, pois a expansão da actividade seguradora torna impensável supôr que uma qualquer companhia possa "ir ao mercado" negociar sempre que quer ressegurar um risco; o segundo, consiste no não funcionamento do método todas as vezes que as seguradoras têm grande conveniência em subscrever um risco que ultrapassa a respectiva capacidade de retenção, e se lhes torna imperioso (às vezes até por exigências legais) ressegurar esse risco o quanto antes. Com o método facultativo, isto pode não suceder com a necessária brevidade. Assim, gradualmente, foram surgindo formas automáticas de resseguro para tornar possível ultrapassar estas limitações: os chamados *tratados*.

Os tratados são acordos celebrados entre uma seguradora e uma ou mais resseguradoras, comprometendo-se a seguradora a ceder e a resseguradora (ou as resseguradoras) a aceitar *todos* os riscos que aquela subscreva, desde que respeitem os termos do tratado e não excedam os limites nele especificados. Quer isto dizer que a seguradora obtem automaticamente resseguro para todos os riscos, presentes e futuros, abrangidos pelo tratado, pois a resseguradora é obrigada a aceitá-los. Naturalmente que isto também significa algumas vezes que a seguradora tem que ressegurar riscos que preferiria conservar na sua totalidade, pois é igualmente obrigada a fazê-lo. Para além disto, só poderá ceder a outras resseguradoras os riscos não cobertos pelo tratado. Estas medidas destinam-se a garantir que a resseguradora não é prejudicada na escolha dos riscos que serão ressegurados e também que beneficiará dum aumento no volume dos seus negócios que justifique a sua participação no tratado. Do ponto de vista dos custos administrativos, os tratados são relativamente mais moderados que o método facultativo e isso também contribuiu para a sua generalização.

O principal entrave à aplicação deste tipo de acordos é, do ponto de vista da resseguradora, a obrigatoriedade da aceitação de todos os riscos, "bons e maus". É claro que uma resseguradora só participará num tratado depois de ter um conhecimento suficiente da carteira de apólices da companhia cedente e da sua gestão, pois é a natureza destas apólices e a capacidade para as gerir, que vão acabar por dizer se o tratado é realmente vantajoso ou se tudo se apresenta para que venha a revelar-se desastroso.

Uma terceira alternativa ao método facultativo e aos tratados são os acordos de resseguro do tipo *misto (facultativo/obrigatório)* ou *"open cover"*.

Este tipo de acordos também assume a forma de tratados, só que já não são tratados mutuamente obrigatórios e esta é a principal diferença em relação aos tratados propriamente ditos: agora a resseguradora ainda se compromete a aceitar os riscos que lhe forem cedidos (desde que estejam conformes com as condições estabelecidas), mas a seguradora é que não é obrigada a ressegurar nenhum risco durante a vigência do tratado (e mesmo que tenha na sua carteira riscos nas condições neste previstas).

A razão que conduziu ao aparecimento dos tratados facultativos/obrigatórios, foi a necessidade que as companhias têm por vezes de ressegurarem rapidamente riscos que não estão contemplados em nenhum dos seus tratados habituais e não podem esperar por um acordo facultativo. Quanto às resseguradoras que aceitam celebrar acordos nestas condições tão imprevisíveis, procuram sempre salvaguardar-se, estabelecendo limites à sua participação nas possíveis percas e aos ramos que estão dispostas a aceitar.

Como se torna evidente por esta sumária descrição do modo de funcionamento do mercado do resseguro, é indispensável que exista uma razoável troca de informações entre a seguradora e a resseguradora, particularmente no que se refere aos ramos cobertos por algum tratado: não é concebível que, em caso algum, uma seguradora engane deliberadamente alguma resseguradora, pois além de outras prováveis consequências, isso provocaria o seu completo descrédito e tornaria muito difícil a celebração de qualquer contrato futuro.

"Reinsurance contracts (...) are subjèct to the
principle uberrimae fidei - of utmost good faith"
(Carter, [4,pág. 123]).

No resseguro, mais do que o segredo, a *confiança* é a alma do negócio. Isso ficará ainda mais patente na próxima secção, dedicada à *reciprocidade.*

3 Reciprocidade

A existência duma certa reciprocidade de interesses entre empresas não concorrentes, mas que de alguma forma estão interrelacionadas, é quase um lugar comum na maior parte dos sectores de actividade. No que diz respeito ao resseguro, é *mesmo* um lugar comum.

Quer isto dizer que as companhias primitivamente cedentes exigem com certa frequência que as resseguradoras com quem celebram contratos lhes cedam a elas, por sua vez, parte da sua carteira, havendo assim uma duplicidade nos papéis por ambas desempenhados. O objectivo principal que conduz a um acordo de reciprocidade é a obtenção, pelo menos no longo prazo, de um certo equilíbrio qualitativo e quantitativo entre os riscos cedidos e os riscos recebidos, equilíbrio este que deve contribuir para o equilíbrio geral das respectivas carteiras das intervenientes no processo. O mais importante é que tal objectivo pode ser alcançado sem que necessariamente haja uma redução nos lucros das companhias envolvidas, isto é, há uma dispersão dos riscos favorável a ambas -e consequentemente uma melhoria na situação de risco de cada uma delas- sem que uma procure obter lucros à custa da outra. É evidente que só ao fim de algum tempo se consegue encontrar este equilíbrio, daí que se fale em *longo prazo.*

Outro tipo de razões, mais imediatas, poderão ser o desejo de aumentar o volume dos prémios, de diversificar a carteira de forma rápida, de alargar a acção a outros países (caso a resseguradora seja estrangeira, como é muitas vezes o caso) ou ainda de reduzir o "ratio" que relaciona as despesas administrativas com os prémios recebidos.

Naturalmente que nem sempre se encontrarão as condições favoráveis à concretização de todas estas vantagens e pode muito bem acontecer que em seu lugar se manifestem antes certos aspectos desfavoráveis. É isto que acontece quando, por exemplo, as duas companhias actuam nos mesmos ramos e, consequentemente, não há qualquer progresso na dispersão dos riscos ou ainda quando os riscos cedidos por uma das companhias são manifestamente mais lucrativos que os cedidos pela outra.

Do ponto de vista operativo, podem também surgir algumas dificuldades, especialmente às companhias de menor dimensão, que não têm potencial para escolher os melhores mercados e nem mesmo para avaliar e rever correctamente e com a periodicidade necessária os resultados de cada tratado. Nestas condições, é grande a probabilidade de que acabem por ficar sujeitas a acordos que as podem expor a responsabilidades demasiado pesadas para as suas capacidades. Nestes casos, as seguradoras farão melhor em abdicar da reciprocidade, procurando em compensação obter uma comissão de resseguro mais alta.

Apesar de todos estes condicionalismos, há muitos casos em que a reciprocidade entre duas seguradoras pode realmente trazer benefícios mútuos a uma e a outra, especialmente quando elas se encontram em territórios diferentes e, à partida, existem motivos para que se possa assumir um elevado grau de independência entre as respectivas carteiras. Os tratados proporcionais e os ramos onde não se registam variações abruptas de ano para ano, são os mais propícios aos acordos recíprocos

> "Proportional treaties, in particular quota share and first surplus in ordinary fire and marine insurance are generally the most suitable for attracting reciprocity, especially when these treaties are reasonably balanced and not subject to great fluctuations in results from year to year." (U.N.C.T.A.D.[12, parag. 89])

Atendendo a que a reciprocidade se baseia fundamentalmente em considerações de longo prazo, há sempre o risco de que ao princípio alguma das companhias obtenha resultados negativos e só passado algum tempo, e depois de corrigidos os factores de desequilíbrio, se verifique a inversão, no sentido da obtenção de lucros. A questão que se mantém, e a que cada companhia tem que dar resposta antes de se decidir a desempenhar o papel de resseguradora da sua resseguradora, é se se pode permitir ou não suportar um período de percas consecutivas na esperança dos lucros futuros. Na secção seguinte, entre outros resultados, serão apresentadas duas tentativas efectuadas para a resolução analítica do problema.

4 Alguns Resultados Teóricos sobre Formas Óptimas de Resseguro

4.1 Determinação da forma de resseguro que minimiza a variância dos riscos retidos pela seguradora

Este primeiro resultado é deduzido em 1960 por Borch [4], e tem por base uma companhia seguradora cuja carteira de negócios é constituída por v apólices e àcerca da qual se sabe que a probabilidade de ocorrência de uma indemnização de montante $x_i > 0$ é $dF_i(x_i)$, tendo todas as funções de distribuição $F_i(x_i)$ valor esperado e variância finitos. Os v riscos são estatisticamente independentes e a probabilidade de que o total de indemnizações da carteira ascenda a x é $dF(x)$, sendo

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_v$$

e sendo $F(x)$ igual à convolução das funções $F_1, F_2, ..., F_v$.

Admite-se que para aceitar este risco global a companhia recebeu um prémio líquido P tal que

$$P = \int_0^{+\infty} x dF(x).$$

Posto isto, considere-se que a seguradora deseja recorrer ao resseguro para modificar a sua distribuição F, por forma a conformá-la com uma outra distribuição G, mais favorável. [Por exemplo, se $G(x) \geq F(x)$ qualquer que seja x e existe um x_1 tal que $G(x_1) > F(x_1)$, então $G(x)$ é, neste sentido, "mais favorável" do que $G(x)$].

Como, pelo menos teoricamente, é possível ajustar a função F a qualquer configuração, mediante a celebração de um conveniente contrato de resseguro, o problema aqui consiste precisamente em escolher o tipo de resseguro apropriado para se proceder a esse ajustamento desejado. Tal ajustamento pode ser encarado como a transferência de "blocos de probabilidade" de um boreliano A para outro boreliano B, sendo os respectivos elementos não negativos e tais que qualquer ponto pertencente a B é não superior a qualquer elemento de A. No fundo, o que se está a fazer é aumentar a probabilidade associada às indemnizações mais baixas e diminuir a das mais elevadas. A questão pode formalizar-se da seguinte forma:

Considerem-se duas funções não negativas $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ tais que

$$\int_A d\alpha(x) = \int_B d\beta(x) = a < 1$$

e que

$$\int_{A_j} d\alpha(x) \leq \int_{A_j} dF(x),$$

onde A_j é um qualquer subconjunto de A.

Admita-se que se celebra um contrato de resseguro que transforma $F(x)$ em

$$G(x) = F(x) - \alpha(x) + \beta(x). \tag{1}$$

A média de $F(x)$ é

$$m_1 = \int_0^{+\infty} x dF(x)$$

e a média de $G(x)$ é

$$m'_1 = m_1 - \left(\int_A x d\alpha(x) - \int_B x d\beta(x)\right) = m_1 - c,$$

fazendo $c = \int_A x d\alpha(x) - \int_B x d\beta(x)$.

A variância de $F(x)$ é

$$V = \int_0^{+\infty} x^2 dF(x) - m_1^2$$

e a de $G(x)$ é

$$V' = V - \int_A x^2 d\alpha + \int_B x^2 d\beta - 2m_1 + c^2.$$

As expressões anteriores permitem-nos concluir imediatamente que a redução operada na média é igual a c pelo que, em princípio, c será o prémio devido à resseguradora pela cobertura que o contrato anteriormente definido fornece. Logo, o passo seguinte consiste em identificar o tipo de resseguro que, *a esse custo*, se revela óptimo para a seguradora. Se se definir como óptimo o tipo de resseguro que a este preço fornecerá a maior redução na variância, o problema a resolver fica

$$Max\ Z = V - V'$$

$$\text{s. a: } \int_A x d\alpha(x) - \int_B x d\beta(x) = c$$

$$\int_A d\alpha = \int_B d\beta = a.$$

A solução, depois de alguns cálculos, vem

$$Z^* = \int_L^{+\infty} x^2 dF(x) - a^2 L^2 - 2m_1 + c^2,$$

onde L é a única raiz da equação

$$c = \int_L^{+\infty} x dF(x) - aL. \qquad (2)$$

Como o autor demonstra que B é um conjunto singular cujo (único) elemento é L e que este ponto concentra em si toda a massa de probabilidade a, então a equação precedente estabelece que se o total de indemnizações a pagar pelo conjunto das apólices exceder o valor L, o excesso deve ser pago pela resseguradora, pois é igual ao prémio c por ela recebido.

Ora isto não é mais do que o resseguro do tipo "stop loss", que parece assim ser a forma de resseguro mais eficiente, na medida em que fornece a maior redução na variância das indemnizações retidas pela companhia cedente. Mais ainda, Borch prova que se a carga adicionada ao prémio P for em todos os tipos de resseguro uma proporção fixa deste, também se pode concluir que o "stop loss" é o tipo de resseguro *mais barato*.

Este resultado parece assim fornecer uma solução indiscutível e constituiu a fonte de muitas generalizações utilizando-se outras medidas de dispersão, nomeadamente por Kahn (1961), Vajda (1962), Pesonen (1967) e Ohlin (1969), até que o próprio Borch (1969) exprimiu a sua estranheza pelo entusiasmo gerado à volta daquilo que, para ele, ([4, pág. 19])

"it is not a particularly interesting result".

De acordo com as suas próprias palavras,

"it seems almost too good to be true"

e a razão para este desencanto encontra-se na constatação de que a hipótese que permitiu obter o resultado (e de acordo com a qual o coeficiente de carga aplicado pela resseguradora é igual, qualquer que seja o tipo de resseguro contratado) é, do ponto de vista prático, bastante disparatada.

Com efeito, uma resseguradora ao celebrar um contrato do tipo "stop loss", aceita um risco com uma variância maior do que se celebrasse um contrato de resseguro do tipo proporcional; se ela, tal como a empresa cedente, também estiver preocupada em minimizar a variância da sua carteira - e Borch põe ainda em causa a variância como uma boa medida do risco, quando as distribuições não são simétricas -, então a um mesmo preço preferirá celebrar, por exemplo, um contrato do tipo quota parte e só fornecerá uma cobertura do tipo "stop loss" se lhe for pago um preço maior. Na prática é isto que sucede.

O autor justifica esta discrepância entre o resultado a que chegou e a realidade, concluindo que ([4, pág. 21])

> "there are two parties (having conflicting interests) to a reinsurance contract, and an arrangement which is very attractive to one party, may be quite unacceptable to the other(...). The *optimal contract must then appear as a reasonable compromise between these interests*."

4.2 Determinação da forma de resseguro que tem custo mínimo, quando é fixado um determinado valor para a variância dos riscos retidos

Também Pesonen (1969, [2]) se apercebeu de que na prática o resseguro do tipo "stop loss" acarreta cargas de segurança muito pesadas, as quais vão sobrecarregar bastante os prémios a pagar à resseguradora e se destinam a compensar o facto de esta aceitar uma parcela relativamente maior da variância dos riscos ressegurados.

A percepção desta realidade, levou-o a reformalizar o problema da determinação da forma óptima de resseguro do seguinte modo:

Considere-se uma companhia que relativamente a um dado conjunto de riscos regista, durante um certo período de tempo (por exemplo, durante um ano), um total de indemnizações igual a X_{tot}. Esta companhia quer recorrer à compra de resseguro, de tal modo que a parte por ela retida dessas indemnizações totais seja dada por uma variável aleatória X ($0 \leq X \leq X_{tot}$) que verifique a condição de que os riscos retidos têm variância igual a um certo valor fixo, V, isto é, mais rigorosamente, que verifique a condição $V[X] = V$.

Sabendo-se que a resseguradora cobra um prémio da forma

$$P_{re} = E[X_{re}] + f(V[X_{re}]),$$

onde $X_{re} = X_{tot} - X$ é a variável aleatória que representa as percas que por ela serão suportadas e f é uma "função de carga" não decrescente, (o que significa que a resseguradora aplica ao prémio puro uma carga que cresce monotonamente com a variância dos riscos por ela aceites), o objectivo consiste em determinar a política de resseguro que permite que a restrição sobre a variância seja satisfeita a um *custo mínimo.*

Começando por verificar que o custo líquido do resseguro é em média igual a $f(V[X_{re}])$, então é imediato que a maneira de resolver o problema se encontra na determinação do acordo de resseguro que minimiza este custo ou, por outras palavras, na determinação do acordo de resseguro que minimiza $V[X_{re}]$ (quando $V[X]$ é fixa).

Notando que

$$V[X_{re}] = V[X_{tot}] + V[X] - 2(E[X_{tot}X] - E[X_{tot}]E[X]),$$

a partir desta expressão pode concluir-se que, uma vez que $V[X_{tot}]$ é um valor que se supõe conhecido (constante) e que $V[X]$ é um dado do problema (também constante), então o custo de resseguro atinge o seu mínimo (em média) se o coeficiente de correlação

$$\frac{E[X_{tot}X] - E[X_{tot}]E[X]}{(V[X_{tot}].V)^{1/2}}$$

das variáveis X e X_{tot} tomar o valor máximo $+1$.

Como é bem conhecido do cálculo das probabilidades, isso acontece se

$$X = aX_{tot}.$$

Conjugando este resultado com a condição $V = V[X]$, tem-se finalmente a solução

$$X = \sqrt{\frac{V}{V[X_{tot}]}}X_{tot},$$

isto é, a resposta ao problema colocado está na celebração dum contrato de resseguro do tipo quota parte.

Obtem-se assim um resultado bastante geral e que, de acordo com Lemaire [11, pág. 32],

"has far more pratical implications than the preceding one".

Aliás, baseando-se no resultado anterior e partindo de condições correspondentes, Lemaire demonstra também o teorema seguinte:

Teorema 1 *Nas condições anteriores, se a resseguradora aplica no cálculo do prémio que cobra, o princípio do desvio padrão ou o princípio da variância, então, para uma dada carga de segurança α, o resseguro de quota parte minimiza a variância das indemnizações retidas pela seguradora.*

A demonstração, (cf [11]) é quase imediata, pois tanto o princípio do desvio padrão como o da variância respeitam a forma

$$P_{re} = E[X_{re}] + f(V[X_{re}]),$$

com f função crescente.

4.3 Determinação da forma de resseguro que minimiza o coeficiente de variação dos riscos retidos, quando é fixada a carga de segurança cobrada pela resseguradora

A resolução do problema das formas óptimas de resseguro introduzindo o coeficiente de variação no modelo, deve-se ainda a Lemaire (1980, [11]) e consiste no seguinte:

Considere-se um determinado conjunto de riscos que a seguradora directa pretende ressegurar, podendo para isso escolher entre um tratado do tipo quota parte puro, um tratado não proporcional (excesso de perca ou do tipo "stop loss") puro, ou uma qualquer combinação entre eles.

Admita-se que os montantes das indemnizações são variáveis aleatórias contínuas, supostas independentes e identicamente distribuídas e admita-se também que a carga de segurança que a resseguradora aplica é uma função não crescente dos níveis de retenção associados a cada tipo de tratado, os quais são, respectivamente, representados por a e M. Esta condição, visa assegurar que, dada uma qualquer curva de isocusto do resseguro combinando os dois tipos de tratados, a não pode diminuir se M for reduzido, isto é, visa assegurar que as curvas de isocusto são estritamente decrescentes. Daqui é possível concluir imediatamente que, para qualquer curva de isocusto, o resseguro do tipo quota parte puro corresponde ao valor mínimo de a sobre essa curva e que o resseguro não proporcional puro corresponderá ao valor mínimo de M sobre a curva.

Lemaire demonstra então o seguinte teorema.

Teorema 2 *Para qualquer princípio de cálculo de prémio verificando os requisitos precedentes, e conhecida a carga de segurança praticada pela resseguradora, o coeficiente de variação dos riscos retidos pela seguradora é minimizado se for celebrado um contrato de resseguro não proporcional (excesso de perca ou do tipo "stop loss") puro.*

Adicionalmente, e de forma similar, o autor demonstra também que

Teorema 3 *Nas mesmas condições do teorema anterior, demonstra-se que o coeficiente de enviesamento dos riscos retidos pela seguradora é minimizado se for celebrado um contrato de resseguro não proporcional puro.*

Verifica-se assim, em condições bastante gerais, que a minimização do coeficiente de variação ou do coeficiente de enviesamento em função da política de resseguro, conduz a que sejam os resseguros de tipo não proporcional os mais adequados a esse fim. Isto não significa contudo que estas são as soluções mais baratas (aliás nem é formulada qualquer hipótese explícita relativa ao preço dos diferentes tipos de resseguro até porque, bem vistas as coisas, o único poder que uma companhia tem para influenciar estes preços é o poder de negociação: em última análise quem decide é a resseguradora. De qualquer modo, a "exigência" de que a carga de segurança que esta aplica seja uma função não crescente dos níveis de retenção, é de certa forma já uma hipótese sobre o preço do resseguro que procura proteger a seguradora).

4.4 Determinação do nível de retenção que minimiza a variância do "lucro" proporcionado pelos riscos retidos, quando se opta ou por uma forma proporcional ou por uma forma não proporcional de resseguro

Nos casos precedentes, o que se procurava era mesmo encontrar o *tipo* de resseguro que minimizava ou a variância dos riscos retidos, ou o seu coeficiente de variação, ou ainda o custo do resseguro, sob certas condições definidas à partida; de agora em diante, a óptica vai alterar-se: de início, é logo definido o tipo de resseguro (ou os tipos de resseguro) que se considera(m) mais apropriado(s) para os riscos em causa, pelo que a questão que fica por resolver é a de qual é a *retenção* óptima a considerar. A incógnita deixa assim de ser tanto o "como ressegurar" para passar a ser o "quanto ressegurar".

Quanto ao critério que orienta a pesquisa dessa retenção óptima, pode fundamentar-se nos mais variados objectivos. Nesta particular secção, dedicada à apresentação de algumas soluções expostas por Bühlmann (1970, [6]), as quais são directamente inspiradas nos resultados de De Finetti, é escolhido o critério da minimização da variância do lucro esperado da seguradora, face a uma determinada expectativa que esta tem. Naturalmente, o autor distingue o caso em que se opta por uma forma de resseguro proporcional (quota parte ou excedente) do caso em que a opção vai para uma forma não proporcional (mais precisamente, para o resseguro do excesso de perca).

- Caso em que o resseguro é proporcional:

  Considere-se um conjunto de n riscos independentes, tais que Y^i é a variável aleatória que representa as indemnizações agregadas associadas ao risco i durante um certo período, P^i é o prémio de resseguro que seria exigido para a cobertura integral de Y^i e a_i é a parte (proporção) do risco i $(i = 1, 2, ..., n)$ retida pela seguradora.

Considere-se ainda uma função Z tal que

$$Z = \sum_{i=1}^{n} a_i P^i - \sum_{i=1}^{n} a_i Y^i.$$

Z, como é evidente, é a variável aleatória que representa a margem obtida pela seguradora a partir das suas retenções dos riscos ressegurados.

Se admitirmos que foi estabelecida uma meta de acordo com a qual esta margem deve atingir um determinado valor constante, então, recordando o critério escolhido por Bühlmann, o problema a resolver consiste na determinação dos valores de $a_1, a_2, ..., a_n$ que permitem

$$Minimizar\ V[Z]$$

$$\text{s. a } E[Z] = constante.$$

Atendendo a que os n riscos são independentes entre si, pode escrever-se que

$$V[Z] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V[Y^i]$$

e que

$$E[Z] = \sum_{i=1}^{n} a_i (P^i - E[Y^i]).$$

Incluindo estas expressões no problema, construindo a Lagrangeana e resolvendo o sistema de estacionaridade, obtém-se, finalmente, a solução

$$a_i^* = C \frac{P^i - E[Y^i]}{V[Y^i]}, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

onde C é uma constante que depende do montante fixado para o lucro esperado.

Se o valor escolhido para esta constante tornar algum a_i^* superior a 1, então deve fazer-se esse particular a_i^* igual a 1. (É claro que quanto maior for o lucro desejado, tanto maior será C e tanto maiores serão os a_i's);

- Caso em que o resseguro é não proporcional:

  Considerem-se novamente n riscos independentes, e continue a variável aleatória Y^i a representar as indemnizações agregadas provocadas pelo risco i durante um certo período ;

  Seja M_i o limite de retenção da seguradora relativamente a esse risco i e P^i o prémio devido à resseguradora por se responsabilizar pelas percas que excedam M_i;

  Seja ainda P_i o prémio total cobrado pela seguradora para a cobertura de Y^i, $(i = 1, 2, ..., n)$.

  Como até aqui, as indemnizações agregadas associadas ao risco i podem exprimir-se por

$$Y^i = \sum_{j \in S_i} X_{ij},$$

onde S_i é o conjunto de pontos de "salto" do processo do número de indemnizações que corresponde a esse risco.

Como se trata dum resseguro do excesso de perca, então as indemnizações agregadas pagas pela seguradora no âmbito do risco i serão dadas por

$$g_i = \sum_{j \in S_i} min\{M_i, X_{ij}\}.$$

Pode agora definir-se a função Z que, tal como anteriormente, representa a margem que a seguradora obtem a partir dos n riscos considerados. Vem

$$Z = \sum_{i=1}^{n} [P_i - g_i - P^i]$$

Se continuarmos a admitir que foi estabelecida uma meta, de acordo com a qual esta margem deve atingir um determinado valor constante, e mantendo-se o critério de optimização escolhido, o problema a resolver consiste agora na determinação dos valores de $M_1, M_2, ..., M_n$ que permitem

$$Minimizar\ V[Z]$$

$$\text{s. a } E[Z] = constante.$$

Porque os n riscos são independentes entre si e porque, por hipótese, o prémio de resseguro P^i é calculado segundo o princípio do valor esperado ($P^i = (1+\alpha_i)E[Y^i - g_i]$) vem, depois de efectuados os cálculos, que

$$V[Z] = \sum_{i=1}^{n}\{E[S_i][M_i^2 - 2\int_0^{M_i} xG_i(x)dx - (\int_0^{M_i}[1-G_i(x)]dx)^2]$$

$$+V[S_i](\int_0^{M_i}[1-G_i(x)]dx)^2\}$$

e que

$$E[Z] = \sum_{i=1}^{n}\{P_i - (1+\alpha_i)E[Y_i] + \alpha_i E[g_i]\},$$

onde $E[S_i]$ é o número esperado de indemnizações causadas pelo risco i e $G_i(x)$ é a função de distribuição (comum) das variáveis X_{ij}. Incluindo as expressões obtidas no problema, construindo a Lagrangeana e resolvendo o sistema de estacionaridade, obtem-se finalmente a solução

$$M_i^* = K\alpha_i - \frac{V[S_i] - E[S_i]}{E[S_i]}\int_0^{M_i}[1-G_i(x)]dx.$$

com K, à imitação do que se tinha com C, igual a uma constante que depende do montante fixado para o lucro esperado. Na prática, inclusivamente, considera-se apenas $M_i^* = K\alpha_i$ e os ajustamentos necessários são efectuados através de K.

É interessante notar que também Beard, Pentikäinen e Pesonen ([1], págs. 152-153), ao procurarem maximizar o lucro da seguradora como função dos níveis de retenção $M_1, M_2, ..., M_n$, depois de os n riscos considerados terem sido ressegurados com um tratado de excesso de perca, e tendo sido imposta uma restrição sobre a probabilidade de ruína, chegam a um resultado que embora diferente deste tem com ele certas analogias.

De acordo com esse resultado, os limites óptimos de retenção M_i^* ($i = 1, 2, ..., n$) devem ainda ser escolhidos proporcionalmente ao coeficiente de carga α_i, aplicado no cálculo do prémio do i-ésimo risco; a diferença em relação ao resultado de Bühlmann está em que agora esse coeficiente não se refere ao prémio cobrado pela resseguradora, como sucedia neste, mas sim ao prémio cobrado pela seguradora, directamente ao titular do risco ressegurado.

Em conclusão, pode dizer-se que de facto Bühlmann não resolve completamente o problema da retenção absoluta, quer se considere que o resseguro é proporcional, quer se considere que é não proporcional, mas as relações por ele apresentadas constituem sem dúvida uma primeira via que pode servir de orientação na resolução de muitos problemas concretos.

4.5 Determinação dos níveis de retenção que maximizam o coeficiente de ajustamento quando se ressegura um conjunto de n riscos através de um contrato de excesso de perca

Waters (1979, [14]) dedica-se também ao problema da retenção óptima da seguradora, mas agora partindo da seguinte situação:
Considere-se ainda uma seguradora que tem n riscos independentes, pelos quais cobra por ano um prémio total de montante igual a P. As indemnizações originadas pelo risco i têm distribuição de Poisson composta com um número médio de ocorrências/ano igual a λ_i e função de distribuição dos montantes das indemnizações individuais igual a G_i ($i = 1, 2, ..., n$). A seguradora procura ressegurar os n riscos com um tratado de excesso de perca e o problema está, mais uma vez, na determinação das retenções óptimas M_i^*, mas agora de modo a maximizar o coeficiente de ajustamento (com o que se espera minimizar a probabilidade de ruína).

Waters impõe as hipóteses (verosímeis) de que :

- $G_i(0) = 0$;
- $dG_i(x)/dx$ existe e é contínua;
- $\int_0^{+\infty} x^2 e^x g_i(x)dx < +\infty$;
- $P > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ (m_i é o valor esperado das indemnizações individuais associadas ao risco i);
- $P < \sum_{i=1}^{n} (1+\alpha_i)\lambda_i m_i$;
- a resseguradora calcula o prémio que cobra por cada risco i ressegurado, de acordo com o princípio do valor esperado, sendo o coeficiente de carga igual a α_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Seguidamente, a partir dos conjuntos

$$\Delta = \{M : M = (M_1, M_2, ..., M_n) \in (0, +\infty)^n, \quad c(M) - \mu(M) > 0\}$$

e

$$\Delta' = \{M : M = (M_1, M_2, ..., M_n) \in [0, +\infty]^n, \quad c(M) - \mu(M) \geq 0\}$$

(com $c(M)$ igual ao prémio retido pela seguradora depois de pago o prémio de resseguro e $\mu(M)$ igual ao correspondente montante retido de indemnizações a pagar)

e com base no coeficiente de ajustamento R que pode nestas condições ser expresso como uma função de M, seja $R(M)$, demonstra que (cf. [14]):

Lema 1 *Existe um único ponto $\hat{M} \in \Delta$ tal que*

$$R(\hat{M}) = \frac{log(1+\alpha_1)}{\hat{M}_1} = \frac{log(1+\alpha_2)}{\hat{M}_2} = \cdots = \frac{log(1+\alpha_n)}{\hat{M}_n}. \tag{3}$$

Lema 2 *Se se verificar que $G_i(x) < 1$ quando $x < +\infty$ para $i = 1, 2, ..., n$, então $R(M)$ tem um máximo local para $M = \hat{M}$ e este é o único máximo local de R em Δ.*

Teorema 4 *Supostas verificadas as condições do lema 2, tem-se que*

$$R(M) < R(\hat{M}), \text{ com } M \in \Delta' \text{ e } M \neq \hat{M}.$$

Estes lemas e o teorema asseguram-nos que, caso se verifiquem as hipóteses enumeradas, é possível fixar os limites de retenção em

$$M_i = \frac{log(1 + \alpha_i)}{R(\hat{M})}, \ (i = 1, 2, ..., n),$$

obtendo-se dessa forma um valor máximo para o coeficiente de ajustamento e, correspondentemente, minimizando-se o limite superior para a probabilidade de ruína fornecido pela desigualdade de Lundberg.

Waters consegue assim determinar os montantes da retenção absoluta relativa a cada risco, pois, por definição, R é a única raiz positiva da equação

$$E[e^{r(Y-P)}] = 1$$

adaptada agora à situação da existência de n riscos desagregados, os quais se encontram ressegurados por um tratado de excesso de perca.

Para a extracção da raiz $R(\hat{M})$ basta considerar esta mesma equação, substituindo M_i pela respectiva solução óptima, isto é, fazendo

$$M_i = \frac{log(1 + \alpha_i)}{R(\hat{M})}, \ (i = 1, 2, ..., n).$$

4.6 Determinação dos níveis de retenção que maximizam o coeficiente de ajustamento associado a um risco, quando este é ressegurado por uma combinação do resseguro do tipo quota parte com o resseguro do excesso de perca

Partindo de hipóteses correspondentes às de Waters, e considerando o mesmo objectivo de maximização do coeficiente de ajustamento, Centeno (1986, [8]), resolve o problema que consiste agora na determinação dos níveis de retenção a fixar no caso em que um risco é ressegurado, primeiro, por um tratado do tipo quota parte (quota retida = a) e, em seguida, relativamente às indemnizações ainda a pagar, por um tratado de excesso de perca (retenção = M).

De uma forma extremamente sintetizada, os resultados obtidos podem resumir-se no seguinte.

Seja $W(a,M)$ a variável aleatória que representa o lucro que a seguradora obtém a partir do risco em causa (depois de também pagas as despesas administrativas que ele acarreta e o prémio de resseguro que lhe corresponde) e seja

$$\hat{A} = \{a : 0 < a \leq 1 \quad \text{e existe pelo menos um } M > 0 \text{ tal que} \quad E[W(a,M)] = 0\}.$$

A autora mostra que

$$\hat{A} = (\hat{a_0}, 1], \quad \text{com} \quad \hat{a_0} = \frac{P(d-c)}{P(1-c) - \lambda E[X]} \text{ onde:}$$

- dP = despesas administrativas provocadas pelo risco, expressas em função do prémio cobrado;
- c = taxa da comissão de resseguro paga pela resseguradora relativamente ao tratado do tipo quota parte (em valor absoluto a comissão é igual a $c(1-a)P$);
- λ = número esperado de indemnizações provocadas pelo risco em causa;
- $E[X]$ = valor esperado de cada indemnização .

A função de distribuição de X é $F(x)$, função absolutamente contínua e tal que

$$F(x) = 0 \qquad , x \leq x_0$$

$$0 < F(x) < 1 \qquad , x_0 < x < x_1$$

$$F(x) = 1 \qquad , x \geq x_1$$

com $x_0 \geq 0$ e $x_1 \leq +\infty$.

A partir daqui, e depois de ser sucessivamente demonstrado que:

- 1) o coeficiente de ajustamento $R(a, M)$ só existe para os pares (a, M) tais que $E[W(a, M)]$ é positivo;
- 2) qualquer que seja o ponto a fixo pertencente ao intervalo $(\hat{a_0}, 1]$, existe um único $\hat{M}$ tal que $R(a, M) = \frac{ln(1+\alpha)}{\hat{M}}$;
- 3) qualquer que seja o ponto a fixo pertencente ao intervalo $(\hat{a_0}, 1]$, $R(a, M)$ é uma função unimodal de M e o seu valor máximo é a raiz $\hat{R}(a)$ da equação que define o coeficiente de ajustamento considerando $M = \frac{ln(1+\alpha)}{R}$;

torna-se claro que o problema inicial fica equivalente a

$$\text{Maximizar } \hat{R}(a) \text{ com } a \in (\hat{a_0}, 1].$$

Depois de provado que $\hat{R}(a)$ ou é uma função unimodal de a ou é uma função não decrescente nesta variável ($a \in (\hat{a_0}, 1]$) e também que

$$\lim_{a \to \hat{a}_0^+} \hat{R}(a) = 0,$$

é finalmente deduzida a solução que consta do seguinte resultado:

Resultado:

Seja

$$f = \lambda x_0 \frac{\alpha - (1+\alpha)ln(1+\alpha)}{ln(1+\alpha)} - [P(1-d) - \lambda(1+\alpha)E[X]]$$

e seja

$$a_1 = \frac{P(d-c)}{P(1-c) - \lambda(1+\alpha)E[X] - \alpha x_0 \frac{\alpha - (1+\alpha)ln(1+\alpha)}{ln(1+\alpha)}}.$$

1- *Supondo que $f > 0$ ou $P(1-c) \neq \lambda(1+\alpha)E[X]$, então:*

a) *Se $\frac{d}{da}\hat{R}(a) > 0$, dado que $a = 1$, e sendo R_1 a raiz da equação que define R quando $a = 1$, a solução do problema é*

$$(a, M) = \left(1, \tfrac{1}{R_1} ln(1+\alpha)\right);$$

b) *Se a derivada anterior for negativa, isso significa que ela se anula para algum $a < 1$. A solução do problema é o ponto (a, M) para o qual isto acontece, com $M = \frac{1}{R} ln(1+\alpha)$ e R igual à solução da equação básica habitual ,adaptada às particularidades da situação que está a ser tratada neste ponto;*

2- *Supondo que $f \leq 0$ e $P(1-c) \neq \lambda(1+\alpha)E[X]$, então a solução óptima é dada por todos os pontos (a, M) tais que $a \in [a_1, 1]$ e $M = \frac{1}{R_1} ln(1+\alpha)$).*

Como se vê, e também como foi salientado, este é apenas um resumo (do ponto de vista matemático, muito simplificado) dos resultados a que Centeno chegou. Contudo, escrevendo a equação básica que define $R(a, M)$, e utilizando o teorema da função implícita, não é difícil explicitar as expressões das derivadas do coeficiente de ajustamento em função dos níveis de retenção. Aliás, na terceira parte do trabalho, que consiste na generalização deste problema à situação em que se têm n riscos independentes, todos estes pormenores serão amplamente tratados. Entretanto, esta segunda parte irá finalizar-se com a apresentação de dois resultados sobre acordos recíprocos, os quais evidenciam como a cooperação mútua (difícilmente possível entre empresas concorrentes) permite às companhias melhorarem a sua segurança sem diminuirem os lucros esperados.

4.7 Determinação de acordos óptimos de reciprocidade

4.7.1 Solução de Beard, Pentikäinen e Pesonen [1]

Considerem-se duas companhias C_1 e C_2 que têm carteiras independentes, sendo X_1 o total das indemnizações pagas por C_1 e X_2 o total das indemnizações pagas por C_2. (Os prémios correspondentes são P_1 e P_2, respectivamente). C_1 e C_2 desejam estabelecer um contrato de resseguro numa base de reciprocidade e o problema consiste em encontrar os termos desse contrato, de modo a satisfazer as duas condições seguintes:

- o lucro esperado com a troca é nulo;
- a variância dos riscos retidos após o contrato, deve tanto quanto possível ser mínima para as duas companhias.

A satisfação do primeiro requisito é imediata: basta assumir que os prémios de resseguro cobrados são "puros", isto é, da forma

$$P_{re} = E[X_{re}],$$

representando X_{re} os riscos ressegurados. Fica assim a segunda condição como único critério de decisão e é fácil ver, dado o resultado apresentado na secção 3.2, que o tipo de resseguro a praticar deve ser do tipo quota parte, de tal modo que

C_1 reterá a_1X_1 e ressegurará $(1-a_1)X_1$;

C_2 reterá a_2X_2 e ressegurará $(1-a_2)X_2$.

No total, C_1 reterá $a_1X_1+(1-a_2)X_2$

e C_2 reterá $(1-a_1)X_1+a_2X_2$.

Se V_1 for a variância de X_1 e V_2 for a variância de X_2, então tem-se que, com o acordo, os riscos retidos por C_1 terão variância

$$V_1^R = a_1^2V_1 + (1-a_2)^2V_2$$

e os riscos retidos por C_2 terão variância

$$V_2^R = (1-a_1)^2 V_1 + a_2^2 V_2,$$

$$a_1, a_2 \in [0,1]$$

pois X_1 e X_2 são independentes.

Também não é difícil ver (cf. [2]) que um óptimo de Pareto se encontra só nos pontos (a_1, a_2) tais que $a_1 + a_2 = 1$, pois são estes os pontos onde já não é possível a deslocação em nenhuma direcção sem que V_1^R e V_2^R sejam aumentadas.

Isto não resolve, contudo, o problema e torna até mais evidente a situação conflituosa entre as duas companhias, pois C_1 preferirá situar-se tão perto do ponto $(0,1)$ quanto possível (V_1^R tende para zero) e, analogamente, C_2 preferirá combinações muito mais próximas do ponto $(1,0)$ (nesse caso é V_2^R que tende a anular-se). Torna-se então necessário impor uma terceira condição, por forma a que uma solução definida se possa determinar. Os autores propõem a condição de que haja equilíbrio entre os riscos trocados, isto é impõem que

- o prémio de resseguro que C_1 paga a C_2, deve igualar o prémio que esta paga àquela, ou seja,

$$(1-a_1)P_1 = (1-a_2)P_2.$$

Esta restrição adicional permite já a obtenção de uma solução unicamente determinada, que é

$$a_1 = \frac{P_1}{P_1+P_2} \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{P_2}{P_1+P_2}.$$

É claro que se fosse imposta outra condição, naturalmente que a solução também iria ser diferente. De qualquer modo, o que é interessante destacar é que os acordos de reciprocidade que se encontram na prática tomam quase sempre a forma de tratados do tipo quota parte, e as conclusões destes autores fornecem um bom ponto de partida para a discussão dos respectivos termos.

4.7.2 Solução de Borch [4]

Considere-se uma companhia C_1 e uma companhia C_2, que suportam indemnizações totais iguais, respectivamente, a x_1 e a x_2. Se não houver qualquer contrato de resseguro, então C_1 pagará mesmo x_1 e C_2 pagará mesmo x_2, mas as duas companhias poderão chegar a acordo sobre uma outra forma de repartirem $x_1 + x_2$ entre si. Podem, por exemplo, acordar em que C_1 pagará $y(x_1 + x_2)$ e C_2 pagará $(x_1 + x_2) - y(x_1 + x_2)$. Esta função $y(x_1 + x_2)$, definida para $x_1, x_2 \geq 0$, representa um tratado de resseguro recíproco e tem o propósito de *melhorar* a situação de risco das duas seguradoras. Como para se poder decidir se uma situação é melhor do que outra é necessário que exista alguma escala de valores, Borch introduz duas "funções de utilidade do dinheiro", $u_1(x)$ para a companhia C_1 e $u_2(x)$ para a companhia C_2. Porque a base de todos os contratos de seguro se encontra na equivalência entre um pagamento que é certo e outro pagamento que é uma variável aleatória, então estas funções de utilidade devem ser interpretadas como o instrumento que permite relacionar uma dada situação de risco com o "pagamento" que lhe é equivalente. O objectivo de Borch é determinar o tipo de acordo que torna máxima a utilidade de C_1 e C_2, uma vez que qualquer contrato recíproco vai alterar o valor da utilidade das duas companhias.

Analiticamente, o problema é resolvido impondo-se que:

- a solução, y, satisfaça as condições

$$U_1(0) \leq U_1(y) \quad \text{e} \quad U_2(0) \leq U_2(y),$$

  com $U_1(0)$ e $U_2(0)$ representando as utilidades de C_1 e de C_2 antes do tratado e $U_1(y)$ e $U_2(y)$ a situação posterior a este;

- a solução, y, satisfaça as condições de óptimo de Pareto, que se podem exprimir exigindo que as desigualdades

$$\Delta U_1 = U_1(\overline{y}) - U_1(y) > 0$$

$$\Delta U_2 = U_2(\overline{y}) - U_2(y) > 0$$

nunca se verifiquem simultâneamente, qualquer que seja $\overline{y}$. (Note-se que $\overline{y} = y(x_1 + x_2) + \epsilon(x_1, x_2)$, com $\epsilon(x_1, x_2)$ uma função arbitrária de valor absoluto pequeno).

Daqui deduz-se que, para um tratado $y(x_1 + x_2)$ corresponder a um óptimo de Pareto, tem que verificar a relação

$$u_2'(S_2 - x_1 - x_2 + y) = k u_1'(S_1 - y)$$

com S_1 e S_2 iguais aos fundos de C_1 e de C_2 inicialmente disponíveis para fazer face ao pagamento das indemnizações x_1 x_2, respectivamente, e com k igual a uma constante positiva.

As funções u_1 e u_2 são, por hipótese, não decrescentes; se se assumir adicionalmente que u_1' e u_2' são funções monótonas decrescentes (utilidades marginais do dinheiro decrescentes), então para cada valor de k haverá um só tratado que satisfaz a igualdade acima e as negociações entre as companhias reduzir-se-ão à escolha de k.

É fácil verificar que, quanto maior for k, maior será y e, portanto, maior será a comparticipação de C_1 nos pagamentos. Logicamente, C_1 procurará reduzir k e C_2 procurará aumentar o seu valor. A solução do problema é finalmente o valor de k que maximiza o produto

$$\{U_1(y(x_1 + x_2, k)) - U_1(0)\} \,.\, \{U_2(y(x_1 + x_2, k)) - U_2(0)\}.$$

Borch aplica estes resultados a alguns exemplos, considerando várias formas para as funções de utilidade. Merece relevo aquele em que considera $u_1(x) = -x^2 + a_1 x$ e $u_2(x) = -x^2 + a_2 x$, pois vai ter uma solução perfeitamente correspondente à de Beard, Pentikäinen e Pesonen: o tratado óptimo é uma troca do tipo quota partes e as quotas resseguradas têm soma igual a 1. Os outros exemplos fornecem as mais variadas soluções.

Como ele mesmo diz ao concluir esses exemplos,

> "The utility functions used (...) seem plausible and lead to reasonable results. One could, however, think of other functions which seem equally acceptable, but which will lead to very different, although still reasonable results. (...) We have no means of saying which of these solutions are right or wrong, in general or for particular types of insurance companies."

Mais uma vez, é claro que a dificuldade não está em *pensar-se* numa função de utilidade *aceitável*, mas sim em *conhecer* a função de utilidade que *realmente* representa a situação da seguradora.

PARTE III

Combinação Óptima
dos
Tratados de Quota Parte e Excesso de Perca
no
Resseguro de n Riscos Independentes

1 Introdução

Esta é a última parte do trabalho e, na sequência do que acabou de ser visto na parte II, também agora se pretende resolver o problema da determinação da forma óptima de resseguro quando se tem como ponto de partida uma dada situação.

De certa forma, a situação que aqui vai servir de ponto de partida, pode considerar-se como uma generalização simultânea da situação descrita por Waters (cf. secção 4.5) e da situação tratada por Centeno (cf. secção 4.6), pois os três problemas partem de uma base que tem muitos pontos em comum, como iremos ver.

2 Apresentação do Problema

Considere-se uma companhia seguradora e admita-se que no conjunto formado pela sua carteira de apólices existem n riscos, os quais podem sem grande dificuldade ser considerados independentes entre si. Apenas para ilustrar a existência de riscos nestas condições podemos pensar, por exemplo, no risco constituído pelo conjunto de apólices referentes a seguros contra incêndios, no risco associado às apólices dos seguros de colheita e ainda no risco correspondente à apólice de seguro contra o roubo de um diamante valioso que, por qualquer razão, estará exposto ao público durante um certo período.

A companhia em questão o que pretende é ressegurar cada um destes n riscos e pretende fazê-lo da seguinte forma:

- Inicialmente, irá estabelecer um contrato de quota parte (resseguro proporcional) de acordo com o qual, relembre-se, transferirá para a resseguradora a responsabilidade pelo pagamento de uma determinada quota parte -a definir no contrato- de qualquer indemnização que venha a ocorrer no âmbito desse risco. Naturalmente que ela, companhia, ficará responsável pelo pagamento da parcela restante;
- Seguidamente, e em relação a esta parcela pela qual ainda fica responsável, a companhia procurará celebrar um contrato de excesso de perca (resseguro não proporcional) por forma a garantir que, mesmo assim, nunca pagará por indemnização um montante superior a um determinado limite.

Naturalmente que, dado um qualquer risco, não fica excluída a possibilidade da seguradora optar por apenas um dos tipos de tratado, sendo neste caso esse particular risco ressegurado somente ou por um tratado de quota parte ou por um tratado de excesso de perca. De qualquer modo, vê-se já que o problema que se vai procurar resolver, reside precisamente na fixação da parcela cedida no contrato de quota parte e do pleno retido no contrato de excesso de perca sem, naturalmente, esquecer a questão dos prémios a pagar à resseguradora. A oposição segurança ($\approx$ resseguro) *vs.* lucro esperado, implica que estes prémios sejam fortemente determinantes dos níveis de retenção a estabelecer, tanto do ponto de vista da seguradora como do da resseguradora, o que é aliás semelhante àquilo que se passa na generalidade das situações de seguro directo. Porque, no entanto, é a resseguradora quem tem o maior poder de decisão nesse particular aspecto, a questão dos prémios não será especificamente abordada, estabelecendo-se apenas algumas hipóteses sobre os princípios de cálculo utilizados. Posto isto, pode então passar-se à formalização rigorosa do problema, necessária para o desenvolvimento posterior do trabalho, o que se fará no ponto seguinte.

3 Formalização do Problema e Hipóteses

3.1 Definição das variáveis e dos parâmetros

Seja Y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ a variável aleatória que representa as indemnizações agregadas a pagar pela companhia seguradora no período de tempo considerado (e que tanto pode ser um ano como outro período qualquer) relativamente ao risco i;

Como nesta altura se torna já imediato, pode escrever-se

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$$

onde:

- $\{X_{ij}\}$, $(j = 1, 2, ..., N_i)$ é a sequência das variáveis aleatórias representativas dos montantes das indemnizações individuais relativas ao risco i, que ocorreram no período em análise;
- N_i é a variável aleatória que representa o número destas indemnizações (é o número de "saltos" do processo do número de indemnizações);

Sejam a_i , ($0 \leq a_i \leq 1$; $i = 1, 2, ..., n$) as n variáveis de decisão que representam **as quotas dos n riscos que serão retidas pela seguradora no que se refere ao tratado** (suponha-se que se trata dum tratado) **de quota parte.** Já se sabe que isto significa que da indemnização X_{ij} $(j = 1, 2, ..., N_i)$ causada pelo risco i, a seguradora pagará o montante $a_i X_{ij}$ e a resseguradora pagará o restante, ou seja, $(1 - a_i)X_{ij}$;

Sejam M_i, $(M_i \geq 0$; $i = 1, 2, ..., n)$ as n variáveis de decisão que representam os **plenos retidos pela seguradora relativamente ao resseguro do excesso de perca** dos n riscos. Como este resseguro se sucede ao resseguro de quota parte, então isto quer dizer que da indemnização X_{ij} $(j = 1, 2, ..., N_i)$ causada pelo risco i, a seguradora fica responsável pelo

$$min \ \{a_i X_{ij}, M_i\},$$

e a resseguradora com quem é feito o resseguro de excesso de perca fica responsável pelo

$$Max \ \{0, a_i X_{ij} - M_i\}.$$

Isto quer dizer, que a seguradora é responsável por $a_i X_{ij}$, se $a_i X_{ij} \leq M_i$ e por M_i se $a_i X_{ij} > M_i$ e, consequentemente, a resseguradora pagará 0 se $a_i X_{ij} \leq M_i$ e pagará $a_i X_{ij} - M_i$ se $a_i X_{ij} > M_i$.

Claro que, quer no caso em que $a_i X_{ij} \leq M_i$, quer no caso em que $a_i X_{ij} > M_i$, o montante a cargo da seguradora, adicionado ao montante pago pelas resseguradoras é, como não podia deixar de ser, igual a X_{ij} . Em caso algum a seguradora ficará responsável por um valor superior a $a_i X_{ij}$;

Seja P_i ($i = 1, 2, ..., n$) **o prémio bruto cobrado pela seguradora** e de onde irá "ser retirado" o prémio de resseguro. Este prémio de resseguro é composto, para cada risco, por duas parcelas, uma referente ao contrato de quota parte, e a outra relativa ao contrato de excesso de perca. Mais tarde serão estabelecidas algumas hipóteses a respeito do modo como uma e outra são calculadas.

3.2 Escolha do critério de optimização

A finalidade de tudo o que se vai seguir é, obviamente, a determinação dos "valores óptimos" das variáveis de decisão a_i e M_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Para orientar esta escolha, que se pretende óptima, é indispensável definir um critério.

Depois do que se viu na parte II, é evidente que existe uma grande variedade de critérios possíveis, desde, por exemplo, a minimização do coeficiente de assimetria das indemnizações a cargo da seguradora, depois do resseguro, até à maximização da utilidade esperada da riqueza da seguradora, também após o resseguro, ou ainda a maximização do coeficiente de ajustamento.

Não é no entanto difícil compreender que, no fundo, tanto a minimização do coeficiente de assimetria, como a maximização da utilidade esperada, correspondem a critérios que, em última análise, tendem a procurar minimizar a probabilidade de ruína da companhia (e com os outros critérios da mesma natureza algo de semelhante se passa). O primeiro, porque procura que a distribuição das indemnizações adquira com o resseguro uma configuração menos assimétrica (menos favorável à ocorrência de grandes percas); o segundo, porque visa garantir que o resseguro vá melhorar a situação da reserva de risco.

Nesta orientação, vai escolher-se antes o critério da maximização do coeficiente de ajustamento R, uma vez que este coeficiente evidencia uma relação directa e conhecida com a probabilidade de ruína $\psi(u_0)$. [1]

R aparece agora como sendo a única raiz positiva da equação

$$E\left[exp\left\{r\sum_{i=1}^{n} Y_i(a_i, M_i) - r\sum_{i=1}^{n}[P_i(1-d_i) - P_{ti}(a_i, M_i)]\right\}\right] = 1, \qquad (1)$$

onde $Y_i(a_i, M_i)$ é o total das indemnizações pagas pela seguradora relativamente ao risco i depois de feito o resseguro, isto é,

$$Y_i(a_i, M_i) = \sum_{j=1}^{N_i} min\{a_i X_{ij}, M_i\},$$

[1] Relação essa que é expressa pelas desigualdades

$$e^{-u_0(R+m)} \leq \psi(u_0) \leq e^{-Ru_0}.$$

(rever ponto 3.3 da parte I)

e d_iP_i é a parcela de P_i utilizada pela companhia para fazer face às suas despesas de funcionamento.

Antes de se prosseguir, é conveniente que sejam estabelecidas algumas hipóteses relativas às distribuições das variáveis X_{ij} e N_i e também ao princípio utilizado no cálculo dos prémios do resseguro. Essas hipóteses são apresentadas na secção seguinte.

3.3 Hipóteses do modelo

- H_1: as variáveis aleatórias N_i $(i = 1, 2, ..., n)$ seguem a distribuição de Poisson com parâmetro λ_i, o que implica que o total das indemnizações provocadas pelo risco i (Y_i) e o total das indemnizações retidas pela seguradora $(Y_i(a_i, M_i))$ seguem distribuições de Poisson compostas (o que implica que as variáveis aleatórias N_i são independentes das variáveis aleatórias X_{ij}, isto é, o número das indemnizações provocadas por um risco, é independente do montante de cada uma destas);
- H_2: as variáveis aleatórias X_{ij} $(i = 1, 2, ..., n \; ; \; j = 1, 2, ..., N_i)$ são variáveis não negativas, independentes entre si e identicamente distribuídas, com função de distribuição $G_i(x)$ da seguinte forma:

$$G_i(x) = 0 \ , \ x \leq x_0$$

$$0 < G_i(x) < 1 \ , \ x > x_0$$

$$(\text{sendo } x_0 \geq 0);$$

- H_3: A derivada $\frac{dG_i(x)}{dx}$ existe e é uma função contínua;
- H_4: Existe a função geradora de momentos de função de distribuição $G_i(x)$ das variáveis aleatórias X_{ij}, no intervalo $(-\infty, Q_i]$, com $Q_i > 0$ *e* $Q_i \leq +\infty$ e sendo

$$\lim_{t_i \to Q_i} E[e^{t_i X_i}] = +\infty;$$

- H_5: O prémio a pagar à resseguradora relativamente ao resseguro do tipo quota parte tem montante igual a

$$(1-a_i)P_i - c_i(1-a_i)P_i =$$
$$= (1-c_i)(1-a_i)P_i.$$

Com efeito, e dada a natureza proporcional deste tipo de resseguro, o prémio seria até, em princípio, igual a $(1-a_i)P_i$, pois os riscos e os correspondentes prémios são divididos entre a seguradora e a resseguradora de acordo com as quotas detidas por uma e por outra. Recordando porém que a seguradora, que suporta todas as despesas de carácter administrativo associadas à gestão do risco i, cobra uma comissão de resseguro com o fim de fazer a resseguradora comparticipar no pagamento destas despesas (comissão essa que a resseguradora encara como sendo "a profit commission for attractive business" [2, pág. 212]), e que a comissão de resseguro se representa por $c_i(1-a_i)P_i$, $0 < c_i < 1$, daí resulta a expressão acima;

- H_6: O prémio a pagar à resseguradora relativamente ao resseguro de excesso de perca é calculado de acordo com o princípio do valor esperado, quer dizer,

$$P(a_i, M_i) = (1+\alpha_i)E[Z_i], \qquad \alpha > 0$$

sendo

$$Z_i = \sum_{j=1}^{N_i} Max\ \{0, a_i X_{ij} - M_i\}$$

as indemnizações agregadas transferidas para a resseguradora com quem é feito esse resseguro.

Notando que:

$$Max\ \{0, a_i X_{ij} - M_i\} = \begin{cases} 0 & , se \quad a_i X_{ij} \leq M_i \\ a_i X_{ij} - M_i & , se \quad a_i X_{ij} > M_i, \end{cases}$$

vem

$$E[Z_i] = E[N_i]E[Max\{0, a_iX_i - M_i\}]$$

$$= \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} 0 dG_i(x) + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_iX_i - M_i) dG_i(x) \right]$$

$$= \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_iX_i - M_i) dG_i(x)],$$

com $\lambda_i = E[N_i]$.

Daqui resulta finalmente a expressão para o prémio de resseguro do excesso de perca, que é

$$P(a_i, M_i) = (1 + \alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_iX_i - M_i) dG_i(x)$$

e também a expressão para o prémio total do resseguro do risco i que é

$$P_{ti}(a_i, M_i) = (1 - c_i)(1 - a_i)P_i + (1 + \alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_iX_i - M_i) dG_i(x). \quad (2)$$

Esta sexta hipótese exige um breve comentário, pois existem razões tanto de ordem teórica como de natureza prática a justificá-la.

Começando pelas considerações teóricas, são de mencionar os resultados obtidos por Waters e Andreadakis [1], que demonstraram que quando a seguradora se decide por uma só forma de resseguro, e esse resseguro é do tipo proporcional, então o coeficiente de ajustamento é uma função unimodal (tem um máximo absoluto) do nível de retenção. Mais, também no caso em que sendo o resseguro não proporcional, se o processo de risco é um processo de Poisson e o prémio de resseguro é calculado de acordo com o princípio do valor esperado, fica garantido que o coeficiente de ajustamento ainda é uma função unimodal da retenção. Paralelamente, foi provado que quando o resseguro é de tipo não proporcional, se o prémio correspondente não é calculado segundo aquele princípio, então o coeficiente de ajustamento pode não ser uma função unimodal e nesse caso dificilmente se conseguirá tratar a questão algebricamente.

Quanto às razões de natureza prática, basta recordar o que foi referido no início da parte II (pág. 32 e ss.) àcerca das conclusões a que, a este respeito, chegou Gerathewohl [10]. Parece, com efeito, que dos princípios de cálculo de prémios apresentados, é realmente o princípio do valor esperado aquele que se aproxima mais dos procedimentos adoptados pelas companhias, muito embora não de forma completa pois, como o mesmo autor ainda menciona,

> " since actuarially calculated premiums are usually inaccurate and only roughly indicate the premium actually required (...) (purely) actuarial methods of calculation are still uncommon in practice [10, pág. 311]";

- H_7:

$$d_i > c_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Esta hipótese destina-se a impedir que a seguradora ressegure a totalidade de qualquer um dos n riscos mediante o tratado de quota parte ($a_i = 0$, $\forall i$) e mesmo assim possa ter lucro positivo "às custas" da comissão de resseguro.

Na verdade, é uma hipótese que surge naturalmente, pois na prática verifica-se quase sempre que $c_i < d_i$, $\forall i$. Se, realmente, para um dado risco i se verificar que $c_i > d_i$, da diferença entre ambos resulta já um certo lucro para a seguradora e não é crível, pelo menos em condições normais, que haja resseguradoras dispostas a contratar nesses termos. Dentro do mesmo tipo de considerações podem estabelecer-se as duas hipóteses seguintes.

- H_8:

$$(1 - c_i)P_i - \lambda_i E[X_i] > 0,$$

isto é, a carga associada ao resseguro do tipo quota parte é positiva;

- H_9:

$$(1-d_i)P_i < (1+\alpha_i)\lambda_i E[X_i] \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

A hipótese H_9 tem uma interpretação perfeitamente semelhante à da hipótese H_7, mas agora no âmbito do resseguro do excedente de perca. Também aqui esta hipótese aparece como natural pois se a resseguradora fixa um valor para α_i tal que se tenha

$$(1-d_i)P_i > (1+\alpha_i)\lambda_i E[X_i],$$

a seguradora terá toda a vantagem em ressegurar a totalidade do risco i através dum contrato de excesso de perca. Mais uma vez, não é normal encontrar resseguradoras que pratiquem estas condições;

Deve ainda referir-se que estas hipóteses também garantem que a seguradora tem lucro esperado não positivo ainda no caso em que ressegura a *totalidade* do risco i mediante uma *combinação* dos dois tipos de resseguro; não faz, de facto, sentido considerar que ela sirva apenas de intermediária entre o segurado e a resseguradora;

- H_{10}:

$$\sum_{i=1}^{n}\{(1-d_i)P_i - \lambda_i E[X_i]\} > 0.$$

Esta última hipótese destina-se a garantir que, mesmo depois de pagas as despesas do funcionamento da seguradora, ainda existe uma margem entre o que resta dos prémios e o valor esperado das indemnizaçõoes correspondentes, margem essa que se destina, como se sabe, a cobrir os eventuais desvios das percas, em relação ao que era esperado, assim como a pagar as cargas de resseguro.

4 Estudo das Condições de Existência do Coeficiente de Ajustamento

Retome-se novamente que, por definição, R é a única raiz positiva da equação

$$E\left[exp\left\{r\sum_{i=1}^{n}Y_i(a_i,M_i)-r\sum_{i=1}^{n}[P_i(1-d_i)-P_{ti}(a_i,M_i)]\right\}\right]=1.$$

Seguidamente, vai procurar encontrar-se uma equação equivalente a esta, mas que facilite os desenvolvimentos posteriores.

Como a expressão anterior é equivalente a

$$E\left[e^{r\sum_{i=1}^{n}Y_i(a_i,M_i)}\right]=e^{r\left(\sum_{i=1}^{n}[P_i(1-d_i)-P_{ti}(a_i,M_i)]\right)},$$

então, atendendo à independência assumida entre as variáveis Y_i, pode escrever-se que

$$\prod_{i=1}^{n}E[e^{rY_i(a_i,M_i)}]=e^{r\left(\sum_{i=1}^{n}[P_i(1-d_i)-P_{ti}(a_i,M_i)]\right)},$$

o que é equivalente a

$$\prod_{i=1}^{n}exp\left\{\lambda_i\left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}}e^{ra_ix}dG_i(x)+e^{rM_i}\left(1-G_i(\frac{M_i}{a_i})\right)-1\right]\right\}$$

$$=e^{r\left(\sum_{i=1}^{n}[P_i(1-d_i)-P_{ti}(a_i,M_i)]\right)}.$$

Esta última equivalência resulta do facto de

$$Y_i(a_i, M_i) = \sum_{j=1}^{N_i} min\ \{a_i X_{ij}, M_i\}$$

ter distribuição de Poisson composta, $\forall i = 1, 2, ..., n$ e, portanto, de a sua função geradora de momentos ser de acordo com a equação (4) da parte I, o que permite escrever

$$E\left[e^{rY_i(a_i,M_i)}\right] = exp\left\{\lambda_i\left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i(x) + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} e^{rM_i} dG_i(x) - 1\right]\right\}$$

$$= exp\left\{\lambda_i\left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i(x) + e^{rM_i}\left(1 - G_i(\frac{M_i}{a_i})\right) - 1\right]\right\}.$$

Dela pode passar-se à igualdade

$$exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i(x) + e^{rM_i}\left(1 - G_i(\frac{M_i}{a_i})\right) - 1\right]\right\}$$

$$= exp\left\{r\left(\sum_{i=1}^{n} [P_i(1 - d_i) - P_{ti}(a_i, M_i)]\right)\right\},$$

donde se deduz por fim que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i\,(x) + e^{rM_i}\left[1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right] - 1\right] - \qquad (3)$$

$$-r\sum_{i=1}^{n} \left[(1 - d_i)\, P_i - P_{ti}\,(a_i, M_i)\right] = 0,$$

que é uma expressão mais adequada para a resolução do problema.

Seja agora o primeiro membro da equação anterior igualado a uma função F (nas variáveis $r; a_1, a_2, ..., a_n; M_1, M_2, ..., M_n$).
Tem-se então que $R = R(a_1, a_2, ...a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ se pode representar como sendo igual à única raiz positiva da equação

$$F(r; a_1, a_2, ..., a_n; M_1, M_2, ..., M_n) = 0. \tag{4}$$

E faz-se $R = R(a_1, a_2, ...a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$, precisamente porque o coeficiente de ajustamento pode, neste caso, considerar-se uma função implícita dos níveis de retenção. Quer isto dizer que, consoante a particular combinação $(a_1, a_2, ...a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ - o particular contrato de resseguro - que se considere, assim se obterá um valor para R. Como sabemos, o nosso objectivo é determinar a combinação que está associada ao máximo de R.

Antes disso, é contudo necessário procurar saber se, qualquer que seja o ponto $(a_1, a_2, ...a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ que se considere (com $a_i \in [0,1]$ e $M_i \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2, ..., n$), existe sempre um $R > 0$ tal que $F = 0$, ou se se tem que impôr alguma restrição sobre os valores que aquelas variáveis podem tomar, para que exista algum R que satisfaça a equação.

Nesse sentido, comecemos por considerar F apenas como função de r, isto é, admitindo que $(a_1, a_2, ...a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ é um ponto fixo. Pode então ver-se com facilidade que F está definida para os valores de r tais que $r < Q$, onde

$$Q = min\{\varsigma_i\}$$

$$com \ \varsigma_i = \begin{cases} +\infty & , se \quad \frac{M_i}{a_i} < +\infty \\ \\ \frac{Q_i}{a_i} & , se \quad \frac{M_i}{a_i} = +\infty \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, ..., n),$$

já que, para valores de r inferiores a Q, nenhuma das parcelas que compõem F é não limitada. Pode então concluir-se que F se encontra definida para todos os valores de $r \in (-\infty, Q)$, qualquer que seja a combinação $(a_1, a_2, ..., a_n.M_1, M_2, ..., M_n)$ escolhida $(0 \leq a_i \leq 1;\ M_i \geq 0,\ \ \forall\, i = 1, 2, ..., n)$.

De seguida, vai apresentar-se um lema onde são discutidas as condições que garantem a existência da raiz $R > 0$ tal que $F(R; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = 0$

Lema 1 *O coeficiente de ajustamento* $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ *existe se e só se*

$$\frac{\delta F}{\delta r} < 0 \textit{ no ponto } r = 0.$$

Demonstração: Um primeiro aspecto a ter em consideração, é que quando $r = 0$ vem $F = 0$, ou seja, $r = 0$ é uma solução (trivial) da equação que define o coeficiente de ajustamento (e também qualquer que seja a combinação $(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ escolhida).

De seguida, tem-se que

$$\frac{\delta F}{\delta r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} a_i x e^{r a_i x} dG_i(x) + M_i e^{r M_i} \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[(1-d_i)P_i - P_{ti}(a_i, M_i)],$$

donde resulta que

$$\frac{\delta^2 F}{\delta r^2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} (a_i x)^2 e^{r a_i x} dG_i(x) + M_i^2 e^{r M_i} \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right)\right],$$

que é claramente não negativa $\ \forall\, (a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ que se considere. Quer isto dizer, que F é uma função convexa de r.

Para ficar concluída a demonstração, basta ver que

$$\lim_{r \to Q} F(r; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = +\infty,$$

também qualquer que seja a combinação $(a_1, a_2, ..., a_n.M_1, M_2, ..., M_n)$ escolhida $(0 \leq a_i \leq 1;\ M_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, ..., n)$.

De facto,

$$\lim_{r \to Q} F(r; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) =$$

$$= \lim_{r \to Q} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{r a_i x} dG_i(x) + e^{r M_i} \left[1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right) \right] - 1 \right] - \right.$$

$$\left. -r \sum_{i=1}^{n} \left[(1 - d_i) P_i - P_{ti}(a_i, M_i) \right] \right\}$$

$$= \lim_{r \to Q} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{r a_i x} dG_i(x) + e^{r M_i} \left[1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right) \right] - 1 \right] - \right.$$

$$-r \sum_{i=1}^{n} [(1 - d_i) P_i - (1 - c_i)(1 - a_i) P_i -$$

$$\left. -(1 + \alpha_i) \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x)] \right\},$$

substituindo P_{ti} pela expressão que lhe corresponde [ver equação (2) desta terceira parte].

O limite acima pode ainda escrever-se na forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to Q} \left\{ \lambda_i \int_{xio}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i(x) + \lambda_i e^{rM_i} \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) - \right.$$

$$-\lambda_i - r(1-d_i)P_i + r(1-c_i)(1-a_i)P_i + r(1+\alpha_i)\lambda_i a_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} x dG_i(x) -$$

$$\left. -r(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} M_i dG_i(x) \right\},$$

por sua vez igual a

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to Q} \left\{ \lambda_i \int_{xio}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{ra_i x} dG_i(x) + \lambda_i e^{rM_i} \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) - \right.$$

$$-\lambda_i - r\left[(c_i - d_i)P_i + a_i(1-c_i)P_i\right] + r(1+\alpha_i)\lambda_i a_i E[X_i] -$$

$$\left. - r(1+\alpha_i)\lambda_i a_i \int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} x dG_i(x) - r(1+\alpha_i)\lambda_i M_i \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) \right\}$$

o que, reagrupando as parcelas, se pode escrever

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{r \to Q} \{ \lambda_i \int_{x_{io}}^{\frac{M_i}{a_i}} \left[e^{ra_i x} - r(1+\alpha_i)a_i x\right] dG_i(x) +$$

$$+\lambda_i \left[e^{rM_i} - r(1+\alpha_i)M_i\right] \left(1 - G_i(\tfrac{M_i}{a_i})\right) - \lambda_i -$$

$$-r\left[(c_i - d_i)P_i + a_i\left[(1-c_i)P_i - (1+\alpha_i)\lambda_i E[X_i]\right]\right] \}$$

$$= +\infty$$

pois, por H_7 e H_9

$$(c_i - d_i)P_i + a_i\left[(1 - c_i)P_i - (1 + \alpha_i)\lambda_i E[X_i]\right] < 0 \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$$

$$0 \leq a_i \leq 1, \ \ \forall i = 1, 2, ..., n,$$

e portanto, pela definição de Q, pelo menos uma das parcelas do somatório acima vai tender para $+\infty$ quando r tende para Q.

Fica assim demonstrado o lema, pois se F se anula quando $r = 0$, se F é função convexa em r e, finalmente, se F tende para $+\infty$ quando r tende para o seu valor máximo, então só existirá um $R > 0$ para o qual F volta a anular-se, se e só se F for decrescente no ponto $r = 0$, isto é, se e só se

$$\frac{\delta F}{\delta r}(0; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) < 0.$$

De facto, dadas as características da função, se para $r = 0$ se tivesse $[\delta F/\delta r] > 0$, isso implicaria que F já não tornaria a anular-se para valores de r positivos, pois já não se poderia verificar nenhuma inversão no seu crescimento. Mas se, pelo contrário, F for decrescente no ponto $r = 0$, as mesmas características ($F(0) = 0$, F tende para $+\infty$ e F é convexa) garantem que existe necessariamente um e um só valor $R = R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) > 0$ tal que $F(R; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = 0$, isto é, garantem a existência do coeficiente de ajustamento.

Do lema precedente deduz-se o resultado seguinte:

Resultado 1:

O coeficiente de ajustamento $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ existe se e só se

$$E[L(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)] > 0,$$

ou seja, se e só se o lucro esperado da seguradora (como função dos níveis de retenção) for positivo.

Demonstração: Comece por se definir a função que representa o lucro da seguradora quando é feito um determinado resseguro, seja

$$L = L(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\, P_i - Y_i(a_i, M_i) - d_i P_i - (1 - a_i)P_i + c_i(1 - a_i)P_i -$$

$$-(1 + \alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x)\,]$$

com $Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} min\ \{a_i X_{ij}, M_i\}$, como é conhecido, e de onde resulta que

$$E[Y_i(a_i, M_i)] = \lambda_i \left[\int_{xio}^{\frac{M_i}{a_i}} a_i x dG_i(x) + \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} M_i dG_i(x) \right] =$$

$$= \lambda_i \int_{x_{i0}}^{+\infty} a_i x dG_i(x) - \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} a_i x dG_i(x) +$$

$$+ \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} M_i dG_i(x) =$$

$$= \lambda_i E[X_i] - \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x).$$

O valor esperado de L vem então, considerando a expressão anterior e reordenando as parcelas de forma mais conveniente, igual a

$$E[L(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(c_i - d_i)P_i + a_i[(1 - c_i)P_i - \lambda_i E[X_i]]- \qquad (5)$$

$$-\lambda_i \alpha_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x)].$$

Para demonstrar o resultado, basta agora verificar que o facto de ser

$$\frac{\delta F}{\delta r} < 0$$

quando $r = 0$, equivale a ser

$$E[L] > 0.$$

De facto,

$$\frac{\delta F}{\delta r}(r = 0) = \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} a_i x dG_i(x) + \lambda_i M_i \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right)\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[(1 - d_i)P_i - P_{ti}(a_i, M_i)] < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i \int_{x_{i0}}^{+\infty} a_i x dG_i(x) - \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} a_i x dG_i(x) + \right.$$

$$\left. + \lambda_i M_i \left(1 - G_i(\tfrac{M_i}{a_i})\right)\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[(1-d_i)P_i-(1-a_i)(1-c_i)P_i-$$

$$-(1+\alpha_i)\lambda_i\int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty}(a_ix-M_i)dG_i(x)\ ]<0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\ (d_i-c_i)P_i-a_i[(1-c_i)P_i-\lambda_iE[X_i]]+$$

$$+\lambda_i\alpha_i\int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty}(a_ix-M_i)dG_i(x)\ ]<0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\ (c_i-d_i)P_i+a_i[(1-c_i)P_i-\lambda_iE[X_i]]-$$

$$-\lambda_i\alpha_i\int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty}(a_ix-M_i)dG_i(x)\ ]>0,$$

como se pretendia.

Repare-se como este resultado faz depender a existência do coeficiente de ajustamento da existência de um lucro esperado positivo, quer dizer, se à partida o lucro esperado for negativo, não faz qualquer sentido considerar que se pode ajustar a probabilidade de ruína utilizando a desigualdade de Lundberg, pois, pelo menos para os riscos em causa, a ruína será certa.

Se definirmos o conjunto

$$\Upsilon = \{(a_1, ..., a_n, M_1, ..., M_n), \quad 0 \leq a_i \leq 1, \quad M_i \geq 0 \quad e \quad E[L] > 0\},$$

então o que o resultado precedente significa, é que o coeficiente de ajustamento $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ existe se e só se $(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) \in \Upsilon$.

Adicionalmente, podem já definir-se as regiões

$$\Upsilon_a = \{(a_1, ..., a_n) : \exists \, pelo \; menos \; um \; (M_1, ..., M_n) \; com.(a_1, ..., a_n, M_1, ..., M_n) \in \Upsilon\}$$

e

$$\Upsilon_M = \{(M_1, ..., M_n) : \exists \, pelo \; menos \; um \; (a_1, ..., a_n) \; com \; (a_1, ..., a_n, M_1, ..., M_n) \in \Upsilon\},$$

que vão ser necessárias posteriormente.

Quanto ao conjunto Υ_a, e porque se tem

$$\frac{\delta L}{\delta M_i} = \lambda_i \alpha_i \left(1 - G_i \left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) > 0,$$

pode ainda ser apresentado numa forma um tanto mais explícita, que é

$$\Upsilon_a = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) : \sum_{i=1}^{n} [(c_i - d_i)P_i + a_i[(1 - c_i)P_i - \lambda_i E[X_i]\,]\,] > 0\right\}. \qquad (6)$$

Note-se que (6) resulta directamente de (5), considerando $M_i = +\infty$, $\forall i = 1, 2, ..., n$, pois dado que a derivada do lucro em ordem à retenção (do resseguro do excesso de perca) é positiva, então, quanto maior for esta retenção, maior será o lucro esperado. Logo, considerando as retenções máximas, consegue obter-se uma condição que é verificada por *todos* os elementos de Υ_a (e apenas por estes).

Um outro resultado útil que a análise anterior permite retirar é o seguinte:

Resultado 2:

Qualquer que seja a combinação $(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ *para a qual se verifica que* $E[L(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)] > 0$, *então tem-se*

$$\frac{\delta F}{\delta r} > 0$$

quando $r = R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$.

Demonstração: Imediata, notando que, como foi referido,

$$F(r; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$$

tem que ser uma função crescente quando $r = R$, para que venha

$$F(R; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = 0.$$

Até agora, fica assim provado que F se encontra definida para os valores de r tal que $r \in (-\infty, Q)$ e que se existe um $R > 0$ tal que $F(R) = 0$, então esse é o valor do coeficiente de ajustamento, cuja existência garante que o lucro esperado da companhia é positivo.

Com base neste conhecimento, vai procurar determinar-se o ponto $(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ que corresponde ao máximo valor de R, o que se fará seguidamente.

5 Resolução do Problema

O problema a resolver é, como sabemos,

$$\text{Maximizar } R = R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$$

s. a:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{Ra_i x} dG_i(x) + e^{RM_i} \left[1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right) \right] - 1 \right] -$$

$$-R \sum_{i=1}^{n} [(1-d_i) P_i - (1-c_i)(1-a_i) P_i$$

$$-(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x_i - M_i) dG_i(x)] = 0$$

$$0 \leq a_i \leq 1$$

$$M_i \geq 0$$

$$(i = 1, 2, ..., n).$$

Como $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ é uma função definida implicitamente, o cálculo dos seus extremantes terá que basear-se fundamentalmente no teorema da função implícita (ver [9]). Assim têm-se mais dois lemas, necessários para a resolução do problema enunciado:

Lema 2 $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ *é uma função contínua nas variáveis* $a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n$ *e é duas vezes diferenciável.*

Demonstração: Imediata, usando o teorema da função implícita e atendendo à hipótese de que as funções $G_i(x)$ são diferenciáveis com derivadas contínuas e também ao resultado 2, que garante que $[\delta F/\delta r] > 0$ quando $r = R$.

Lema 3 *Qualquer que seja o ponto fixo* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $\in \Upsilon_a$ *existe um único ponto tal que a raiz da equação* $F = 0$ *é da forma*

$$R(a_1, a_2, ..., a_n, \hat{M}_1, \hat{M}_2, ..., \hat{M}_n) = \frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{M}_i}, i = 1, 2, ..., n,$$

com $(a_1, a_2, ..., a_n, \hat{M}_1, \hat{M}_2, ..., \hat{M}_n) \in \Upsilon$.

Demonstração: Considere-se

$$\frac{ln(1+\alpha_1)}{M_1} = \frac{ln(1+\alpha_2)}{M_2} = \cdots = \frac{ln(1+\alpha_n)}{M_n} = \frac{1}{\tilde{M}}, \quad \tilde{M} > 0$$

e, portanto, considere-se de igual modo

$$R = \frac{1}{\tilde{M}}.$$

Seja agora a função

$$H_{\tilde{M}} = \tilde{M} F_{\tilde{M}}$$

com

$$F_{\tilde{M}} = F\left(\frac{1}{\tilde{M}}; a_1, ..., a_n, \tilde{M}ln(1+\alpha_1), ..., \tilde{M}ln(1+\alpha_n)\right).$$

Efectuando as necessárias substituições, tem-se que

$$F_{\tilde{M}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} e^{\frac{1}{\tilde{M}}a_i x} dG_i(x) + e^{ln(1+\alpha_i)}\left(1 - G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right) - 1\right] -$$

$$-\tfrac{1}{\tilde{M}} \sum_{i=1}^{n} [(1-d_i)P_i - (1-c_i)(1-\dot{a}_i)P_i -$$

$$\left. - (1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} \left(a_i x - \tilde{M}ln(1+\alpha_i)\right) dG_i(x)\right]$$

e portanto

$$H_{\tilde{M}} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} \tilde{M} e^{\frac{1}{\tilde{M}}a_i x} dG_i(x) + \right.$$

$$+\lambda_i \tilde{M}(1+\alpha_i)\left[1 - G_i\left(\tilde{M}\tfrac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right] - \tilde{M}\lambda_i -$$

$$-[(1-d_i)P_i - (1-c_i)(1-a_i)P_i] +$$

$$\left. + (1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} \left(a_i x - \tilde{M}ln(1+\alpha_i)\right) dG_i(x) \right\}.$$

Para provar o lema, basta ver que para a função

$$H_{\tilde{M}} = H_{\tilde{M}}(\tilde{M}, a_1, a_2, ..., a_n),$$

$$com \quad (a_1, a_2, ..., a_n) \quad fixo \quad \in \Upsilon_a$$

se verifica que:

- 1) $\lim_{\tilde{M} \to 0^+} H_{\tilde{M}} > 0$;

- 2) $\lim_{\tilde{M} \to +\infty} H_{\tilde{M}} < 0$;

- 3) $\left[\frac{\delta^2 H_{\tilde{M}}}{\delta M^2}\right] > 0, \ \forall \tilde{M} > 0$ e $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$,

o que se fará de seguida.

- 1)

$$\lim_{\tilde{M} \to 0^+} H_{\tilde{M}}(\tilde{M}, a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} - [(1 - d_i)P_i - (1 - c_i)(1 - a_i)P_i - (1 + \alpha_i)\lambda_i a_i E[X_i]] > 0$$

por H_7 e H_9;

- 2)

$$\lim_{\tilde{M} \to +\infty} H_{\tilde{M}}(\tilde{M}, a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$= \lim_{\tilde{M} \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}^{\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}} \tilde{M} e^{\frac{1}{\tilde{M}} a_i x} dG_i(x) - \right.$$

$$-\lambda_i \tilde{M} G_i \left(\tilde{M}^{\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}\right) + \lambda_i \tilde{M} \alpha_i \left[1 - G_i \left(\tilde{M}^{\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}\right)\right] -$$

$$-\left[(1-d_i)P_i-(1-c_i)(1-a_i)P_i\right]+$$

$$+\left.(1+\alpha_i)\lambda_i\int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty}\left(a_ix-\tilde{M}ln(1+\alpha_i)\right)dG_i(x)\right\}$$

que, somando e subtraindo $\lambda_i a_i E[X_i]$, é igual a

$$\lim_{\tilde{M}\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\{\ \lambda_i\int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}\tilde{M}e^{\frac{1}{\tilde{M}}a_ix}dG_i(x)-$$

$$-\lambda_i\tilde{M}G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)-\lambda_i\int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}a_ixdG_i(x)-$$

$$-\int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty}a_ixdG_i(x)+\lambda_ia_iE[X_i]$$

$$+\lambda_i\tilde{M}\alpha_i\left[1-G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right]+$$

$$+(1+\alpha_i)\lambda_i\int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty}\left(a_ix-\tilde{M}ln(1+\alpha_i)\right)dG_i(x)-$$

$$-\left[(c_i-d_i)P_i+a_i(1-c_i)P_i\right]\ \}=$$

$$= \lim_{\tilde{M}\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \{ \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} \tilde{M}\left[e^{\frac{1}{\tilde{M}}a_i x} - 1 - \frac{a_i x}{\tilde{M}}\right] dG_i(x) -$$

$$-\lambda_i \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} a_i x dG_i(x) +$$

$$+\lambda_i \tilde{M}\alpha_i \left[1 - G_i(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i})\right] +$$

$$+(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} \left(a_i x - \tilde{M}ln(1+\alpha_i)\right) dG_i(x) -$$

$$-[(c_i - d_i)P_i + a_i[(1-c_i)P_i - \lambda_i E[X_i]] \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{ \lim_{\tilde{M}\to+\infty} \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} \tilde{M}\left(1 + \frac{a_i x}{\tilde{M}} + \frac{(a_i x)^2}{\tilde{M}^2 2!} + \right.$$

$$\left. + \cdots - 1 - \frac{a_i x}{\tilde{M}}\right) dG_i(x) - [(c_i - d_i)P_i + a_i[(1-c_i)P_i - \lambda_i a_i E[X_i]] \} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \{[(c_i - d_i)P_i + +a_i[(1-c_i)P_i - \lambda_i E[X_i]] \} < 0,$$

$$\forall\ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a,$$

tendo em atenção (6).

No cálculo deste limite utiliza-se o resultado segundo o qual

$$\left[1 - G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right]$$

tende mais rapidamente para zero quando $\tilde{M}$ tende para infinito do que o produto $\lambda_i \tilde{M}\alpha_i$, $i = 1, 2, ..., n$, tende para infinito, o que se verifica para todas as distribuições com valor esperado finito, como é o caso das distribuições $G_i(x)$ (ver, por exemplo, [12, pág. 167]);

- 3) De início, calcule-se

$$\frac{\delta H_{\tilde{M}}}{\delta \tilde{M}} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \lambda_i \frac{\delta}{\delta \tilde{M}} \left[\int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} \tilde{M} e^{\frac{1}{\tilde{M}} a_i x} dG_i(x) \right] + \right.$$

$$+ \frac{\delta}{\delta \tilde{M}} \left[\lambda_i \tilde{M}(1+\alpha_i)[1 - G_i\left(\tilde{M} ln(1+\alpha_i)/a_i\right)\right] - \lambda_i +$$

$$\left. + \frac{\delta}{\delta \tilde{M}} \left[(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}}^{+\infty} \left(a_i x - \tilde{M} ln(1+\alpha_i)\right) dG_i(x) \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{ \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} e^{\frac{1}{\tilde{M}} a_i x} dG_i(x) -$$

$$-\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} e^{\frac{1}{\tilde{M}} a_i x} \left(\frac{a_i x}{\tilde{M}}\right) dG_i(x) +$$

$$+\lambda_i(1+\alpha_i)\left[1 - G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right] - \lambda_i -$$

$$-\lambda_i(1+\alpha_i) ln(1+\alpha_i)\left[1 - G_i\left(\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}\right)\right] \ \}.$$

Derivando novamente em relação a $\tilde{M}$, vem

$$\frac{\delta^2 H_{\tilde{M}}}{\delta \tilde{M}^2} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\tilde{M}\frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i}} e^{\frac{1}{\tilde{M}} a_i x} \frac{(a_i x)^2}{\tilde{M}^3} dG_i(x) \quad \geq 0.$$

Deste modo, para $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$, existe um e um só $\tilde{M}$ positivo tal que $H_{\tilde{M}}(\tilde{M}, a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ e portanto, devido à definição de $H_{\tilde{M}}$, podemos concluir que, de forma correspondente, para $\forall\ (a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$, existe um e um só $\tilde{M}$ positivo tal que $F_{\tilde{M}}(\tilde{M}, a_1, a_2, ..., a_n) = 0$.

O lema fica assim provado. O seu interesse reside no facto de assegurar que em todo o conjunto Υ (e considerando $a_1, a_2, ..., a_n$ fixos), não existe senão uma combinação $(a_1, a_2, ..., a_n, \hat{M}_1, \hat{M}_2, ..., \hat{M}_n)$ para a qual se verifica que o coeficiente de ajustamento verifica a relação

$$R = \frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{M}_i}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Agora estamos já em condições de enunciar o resultado 3, que fornece a solução (parcial) do problema no que se refere ao resseguro do excesso de perca.

Resultado 3:

Considerando um ponto fixo

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a,$$

então $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ é uma função unimodal nas variáveis $M_1, M_2, ..., M_n$, e atinge o seu valor máximo quando

$$M_i = \frac{ln(1+\alpha_i)}{R}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Demonstração:

A equação que define R é, como se sabe,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\int_{x_{i0}}^{\frac{M_i}{a_i}} e^{Ra_i x} dG_i(x) + e^{RM_i} \left[1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right) \right] - 1 \right] -$$

$$-R \sum_{i=1}^{n} [\ (1-d_i)\, P_i - (1-c_i)(1-a_i)P_i -$$

$$-(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x)\ ] = 0$$

ou, abreviadamente,

$$F(R; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = 0.$$

Aplicando (novamente) o teorema da função implícita, tem-se que

$$\frac{\delta R}{\delta M_i} = \frac{-\dfrac{\delta F}{\delta M_i}}{\dfrac{\delta F}{\delta R}} = \frac{\lambda_i (1/a_i) e^{Ra_i \frac{M_i}{a_i}} g_i(M_i/a_i)}{\left[\dfrac{\delta F}{\delta R}\right]} +$$

$$+ \frac{\lambda_i e^{RM_i} R[1 - G_i(\frac{M_i}{a_i})] - \lambda_i e^{RM_i} g_i(\frac{M_i}{a_i})(1/a_i)}{\left[\dfrac{\delta F}{\delta R}\right]} -$$

$$-\frac{R(1+\alpha_i)\lambda_i(1/a_i)[a_i(\frac{M_i}{a_i}) - M_i] g_i(\frac{M_i}{a_i})}{\left[\dfrac{\delta F}{\delta R}\right]} +$$

$$+ \frac{R(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} -dG_i(x)}{\left[\dfrac{\delta F}{\delta R}\right]} =$$

$$= \frac{-\lambda_i e^{RM_i} R[1 - G_i(\frac{M_i}{a_i})] + R(1+\alpha_i)\lambda_i[1 - G_i(\frac{M_i}{a_i})]}{\left[\frac{\delta F}{\delta R}\right]}. \quad (7)$$

Desta última igualdade resulta imediatamente que

$$\left[\frac{\delta R}{\delta M_i}\right] = 0$$

- ou quando $R = 0$ (situação sem interesse, pela definição do coeficiente de ajustamento);
- ou quando $G_i(\frac{M_i}{a_i}) = 1$, o que sucede se e só se $M_i = +\infty$;
- ou quando

$$e^{RM_i} = (1 + \alpha_i),$$

o que é equivalente a

$$M_i = \frac{ln(1+\alpha_i)}{R}, \; i = 1, 2, ..., n. \quad (8)$$

Podemos então concluir, tendo em conta o lema 3, que o único valor de M_i finito para o qual

$$\left[\frac{\delta R}{\delta M_i}\right] = 0$$

é tal que

$$M_i = \frac{ln(1+\alpha_i)}{R}, \quad i = 1,2,...,n.$$

Derivando (7) em ordem a M_j, $j = 1,2,...,n$, e usando (8), temos que

$$\frac{\delta^2 R}{\delta M_i \delta M_j} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_i R^2 e^{RM_i}\left[1-G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right]}{\left[\frac{\delta F}{\delta R}\right]} & ,se \quad i = j \\ \\ 0 & ,se \quad i \neq j \end{cases}$$

Como, pelo resultado 2, $[\delta F/\delta R] > 0$, então

$$\left[\frac{\delta^2 R}{\delta M_i^2}(M_i = R^{-1}ln(1+\alpha_i))\right] < 0, \ \forall\ i = 1,2,...,n,$$

daqui resulta finalmente que para $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$ fixo, $R(a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n)$ é uma função unimodal de $M_1, M_2, ..., M_n$ e o seu máximo é atingido no único ponto a satisfazer

$$F\left(R, a_1, ..., a_n, R^{-1}ln(1+\alpha_1), ..., R^{-1}ln(1+\alpha_n)\right) = 0.$$

Depois de demonstrado o resultado anterior, consegue de facto ter-se uma ideia muito mais aproximada do comportamento do coeficiente de ajustamento como função dos limites de retenção do resseguro de excesso de perca. Com efeito, fica claro que há uma certa região (não contida em Υ_M, e da qual faz parte o ponto $(0,0,...,0)$), onde o lucro esperado é não positivo (cf. hipótese H_9). Nesses pontos, o coeficiente de ajustamento não existe. Em seguida, à medida que algum dos M_i aumenta, o coeficiente de ajustamento também aumenta [Repare-se que

$[\delta R/\delta M_i] = R\lambda_i\alpha_i > 0$ quando $M_i = 0]^2$ e isto é assim até que $M_i = R^{-1}ln(1+\alpha_i)$, ponto a partir do qual $[\delta R/\delta M_i]$ se torna negativa, como se verifica com toda a facilidade, pois

$$\left[\frac{\delta R}{\delta M_i}\right] = R(1+\alpha_i)\lambda_i\left(\rho - e^{\Delta}\rho\right) < 0$$

se

$$M_i = \left(\frac{ln(1+\alpha_i)}{R} + \Delta\right), \Delta > 0,$$

atendendo a que

$$\rho = \left[1 - G_i\left(\frac{ln(1+\alpha_i)/R + \Delta}{a_i}\right)\right].$$

Deve contudo salientar-se que, embora o coeficiente de ajustamento evolua desta forma, nunca volta a atingir o valor zero, pois nem mesmo quando todos os M_i $(i = 1, 2, ..., n)$ tendem para $+\infty$ isso volta a acontecer. (Esta é, de facto, uma situação em que não se faz nenhum resseguro do tipo excesso de perca e à qual está associado um lucro esperado positivo, condição necessária e suficiente para que R seja > 0).

Posto isto, pode então estabelecer-se que o problema inicial ficará completamente solucionado se se resolver o problema

$$Minimizar \hat{R}(a_1, a_2, ..., a_n)$$

$$s.a: \quad F_{\hat{R}} = F\left(\hat{R}; a_1, ..., a_n, \hat{R}^{-1}ln(1+\alpha_1), ..., \hat{R}^{-1}ln(1+\alpha_n)\right)$$

[2] e admitindo que os outros M_i tomam valores que permitem que o coeficiente de ajustamento ainda exista.

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a,$$

pois ao resolver-se este, estão a determinar-se os níveis óptimos de retenção relativos ao tratado de quota parte, *incluindo simultâneamente a relação de óptimo deduzida para o tratado de excesso de perca.*

Seguindo um processo semelhante ao que se desenvolveu atrás, vai então enunciar-se o resultado que fornece a solução deste último problema.

Resultado 4:

$\hat{R}(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma função unimodal de $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$ e, no ponto onde atinge o seu máximo:

i) *$a_i = 1$ se e só se*

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i}\,(a_i = 1) \geq 0;$$

ii) *ou a_i é tal que*

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} = 0,$$

se e só se

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i}\,(a_i = 1) \leq 0.$$

$$(i = 1, 2, ..., n).$$

Demonstração:

Comecemos por calcular

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} = \frac{-\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta a_i}}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} =$$

$$= \frac{\lambda_i \frac{ln(1+\alpha_i)}{a_i^2}(1+\alpha_i) g_i\left(\frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{R}a_i}\right)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} -$$

$$- \frac{\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{R}a_i}} \hat{R} x e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} -$$

$$- \frac{\lambda_i (1+\alpha_i) g_i\left(\frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{R}a_i}\right)\left[\frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{R}a_i^2}\right]}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} +$$

$$+ \frac{\frac{\hat{R}(1-c_i)P_i}{\delta F_{\hat{R}}}}{\delta \hat{R}} - \frac{\hat{R}(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{ln(1+\alpha_i)}{\hat{R}a_i}}^{+\infty} x dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} =$$

$$= \frac{-\hat{R}\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}} x e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} +$$

$$+ \frac{\hat{R}(1-c_i)P_i}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} - \frac{\hat{R}(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}}^{+\infty} x dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} .$$

Desta igualdade deduz-se que

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} = 0$$

se e só se

$$(1 - c_i)P_i = \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}} x e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x) +$$

$$+ (1 + \alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}}^{+\infty} x dG_i(x) .$$

Calculando seguidamente as derivadas parciais de segunda ordem nestes pontos onde a primeira derivada se anula, temos que

$$\frac{\delta^2 \hat{R}}{\delta a_i \delta a_j} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i \frac{\ln(1+\alpha_i)}{a_i^2}(1+\alpha_i)\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i} g_i\left(\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}\right)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} - \\ - \dfrac{\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}} \hat{R}^2 x^2 e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} - \\ - \dfrac{(1+\alpha_i)\lambda_i \frac{\ln(1+\alpha_i)}{a_i^2} \frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i} g_i\left(\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}\right)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} & , se \quad i = j \\ 0 & , se \quad i \neq j \end{cases}$$

o que é o mesmo que

$$\frac{\delta^2 \hat{R}}{\delta a_i^2} = \frac{\lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}} \hat{R}^2 x^2 e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x)}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}}$$

e que

$$\left[\frac{\delta^2 \hat{R}}{\delta a_i a_j}\right] = 0$$

$$(se \quad i \neq j).$$

Resulta então claramente daqui que, no ponto $(a_1, a_2, ..., a_n)$ para o qual se verifica que

$$(1 - c_i)P_i = \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}} x e^{\hat{R}a_i x} dG_i(x)$$

$$+(1 + \alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{\ln(1+\alpha_i)}{Ra_i}}^{+\infty} x dG_i(x)$$

$$(i = 1, 2, ..., n),$$

a segunda diferencial da função $\hat{R}(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma forma quadrática definida negativa e portanto esta é uma função unimodal para $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$. $[\delta \hat{R}/\delta a_i]$ tem assim, quando muito, uma raiz em Υ_a. Deve recordar-se que Υ_a é o conjunto dos tratados relativos ao resseguro de quota parte para os quais existe a garantia de que o lucro esperado é positivo e que se tem $0 \leq a_i \leq 1$, $i = 1, 2, ..., n$.

Aliás, e ao contrário do que sucede quando se considera um único risco, caso em que é possível explicitar Υ_a (ver Centeno [8]), agora apenas se sabe que, devido às hipóteses introduzidas, o ponto $(0,0,...,0) \not\in \Upsilon_a$. Evidentemente que o ponto $(1,1,...,1)$ pertence ao conjunto, por H_{10} e pelo lema 3, e, além disso,

$$\lim_{a_i \to 0^+} {}^{3} \frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} = \frac{R[(1-c_i)P_i - \lambda_i E[X_i]]}{\frac{\delta F_{\hat{R}}}{\delta \hat{R}}} > 0, \; por H_8.$$

De qualquer modo, atendendo à unimodalidade de $\hat{R}(a_1, a_2, ..., a_n)$, e ao facto de $\hat{R}$ existir no ponto $(1,1,...,1)$, é imediata a verificação das proposições que se apresentam no resultado 4, isto é:

$\hat{R}(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma função unimodal de $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Upsilon_a$ e o seu maximizante é tal que:

- $a_i = 1$ se e só se

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} \geq 0$$

quando $a_i = 1$, o que significa que $\hat{R}$ ainda é crescente e, logicamente, é máxima para o maior valor admissível para a_i $(a_i = 1)$;

- a_i é tal que

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} = 0$$

se e só se

[3] e admitindo que os outros a_i tomam valores que permitem que o coeficiente de ajustamento ainda exista.

$$\frac{\delta \hat{R}}{\delta a_i} \leq 0,$$

quando $a_i = 1$, o que significa que $\hat{R}$ já é decrescente e, logicamente, a derivada parcial $\left[\delta \hat{R} / \delta a_i\right]$ se anula para algum valor de a_i não superior à unidade $(i = 1, 2, ..., n)$.

Em síntese, pode então concluir-se que a solução do problema inicial de determinação dos níveis óptimos de retenção, quando se pretende ressegurar n riscos independentes mediante uma combinação do resseguro de quota parte com o resseguro de excesso de perca, é o ponto $(a_1, a_2, ..., a_n)$ que verifica o sistema de condições seguinte:

$$
\begin{cases}
\rightarrow M_i = \frac{ln(1+\alpha_i)}{R}, \quad (i = 1, 2, ..., n) \\[2em]
\rightarrow a_i : \ (1 - c_i)P_i = \lambda_i \int_{x_{i0}}^{\frac{ln(1+\alpha_i)}{R a_i}} x e^{\hat{R} a_i x} dG_i(x) + \\[1em]
\qquad +(1+\alpha_i)\lambda_i \int_{\frac{ln(1+\alpha_i)}{R a_i}}^{+\infty} x dG_i(x), \\[1em]
\qquad \text{se} \quad \left[\frac{\delta \hat{\mathbf{R}}}{\delta \mathbf{a_i}}\right] < 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{1} \\[2em]
\rightarrow ou \quad a_i = 1, \\[1em]
\qquad \text{se} \quad \left[\frac{\delta \hat{\mathbf{R}}}{\delta \mathbf{a_i}}\right] \geq 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{a_i} = \mathbf{1} \\[1em]
\qquad (i = 1, 2, ..., n) \\[4em]
\rightarrow F(R; a_1, a_2, ..., a_n, M_1, M_2, ..., M_n) = 0
\end{cases}
$$

Estes resultados no fundo não são mais do que uma generalização dos resultados (correspondentes) obtidos por Centeno [8; cap. 4] na resolução do problema em que se considera um único risco. A independência assumida entre os riscos, por um lado, e a estrutura da equação cuja raiz é o coeficiente de ajustamento, por outro, explicam esta identidade formal das soluções, num e noutro caso.

Do ponto de vista prático das seguradoras, naturalmente que se trata de situações muito diversas. De facto, se os n riscos em causa constituirem uma parcela considerável do seu volume de negócios, então já o coeficiente de ajustamento obtido segundo as expressões anteriores fornece uma boa medida da probabilidade de ruína da companhia no seu todo, no que não faz grande sentido pensar quando se tem um único risco na análise. Para além disso, as próprias retenções óptimas vão depender desse valor do coeficiente de ajustamento e, logicamente, é admissível supor que no global se alcançará desta maneira uma situação mais favorável para a companhia do que se se fizer o *ajustamento* dos resseguros individualmente, risco a risco. Claro que isto, só a experiência prática o pode confirmar ou não.

Observações Finais

Para terminar, e porque praticamente já tudo foi dito, falta apenas repetir uma vez mais como realmente o estudo da teoria do risco, e em particular dos aspectos ligados ao resseguro, se revelou interessante, e como, a partir dele, se pode pensar numa infinidade de variantes que constituem uma fonte quase inesgotável para outros estudos.

Embora este não tenha sido um trabalho orientado para a resolução de aplicações práticas concretas, não é possível, contudo, deixar de reconhecer como seria igualmente interessante procurar comparar a situação que uma dada companhia real atingiu com a sua prática corrente de resseguro, e aquela a que teria chegado se tivessem sido aplicados os resultados teóricos obtidos, considerando os dados referentes a um certo conjunto de riscos.
Seria certamente um trabalho motivador.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Andreadakis, M. e Waters, H. R. (1980)
"The Effect of Reinsurance on the Degree of Risk Associated with an Insurance Portfolio"
Astin Bulletin, 11, pp. 119-135;

[2] - Beard, R. E. , Pentikainen, T. e Pesonen, E. (1984)
Risk Theory
Chapman and Hall;

[3] - Benjamin, B. (1977)
General Insurance
Published for the Institute of Actuaries and The Faculty of Actuaries
London, Heinemann

[4] - Borch, K. (1974)
The Mathematical Theory of Insurance
Lexington Books

[5] - Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D. e Nesbitt, C. (1982)
Society of Actuaries Study Note on Risk Theory
Chicago, Society of Actuaries;

[6] - Bühlmann, H. (1970)
Mathematical Methods in Risk Theory
Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York;

[7] - Carter, R. L. (1979)
Reinsurance
Klewer Publishing, Great Britain;

[8] - Centeno, M. L. C. (1986)
Some Theoretical Aspects of Combinations of Quota Share and

non-Proportional Reinsurance Treaties
Ph. D. Thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh;

[9] - Dias Agudo, F. R. (1972)
Lições de Análise Infinitesimal - Livro I. Cálculo Diferencial em R^n
Livraria Escolar Editora;

[10] - Gerathewohl, K. (1980)
Reinsurance Principles and Practice - Vol. I
Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe;

[11] - Gerber, H. V. (1979)
An Introduction to Mathematical Risk Theory
Richard D. Irwin, Inc.: Homewood;

[12] - Lemaire, J. , Reinhard, J. M. e Vincke, P. H. (1981)
"A New Approach to Reinsurance: Multicriteria Analysis"
in Net Retentions, pp. 7-42; Reinsurance Groep NV: Amsterdam;

[13] - Murteira, B. J. F. (1979)
Probabilidades e Estatística
Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.

[14] - Sundt, Bjorn (1983)
"Notas baseadas nas exposições feitas na Universidade de Mannheim durante o Verão de 1983"

[15] - U.N.C.T.A.D. (Study by the U.N.C.T.A.D. secretariat) (1973)
Reinsurance Problems in Developing Countries
United Nations - New York

[16] - Waters, R. L. (1979)
"Excess of Loss Reinsurance Limits"
Scandinavian Actuarial Journal, pp.37-43

ERRATA

na pág.	linha	onde se lê	deve ler-se
v	14	excedente	excesso de perca
12	10	$p(n) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$	$p(n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$
16	11	$\gamma_{Y_t} = \frac{E[X^3]}{(E[X^2]^3\lambda t)^{-1/2}}$	$\gamma_{Y_t} = \frac{E[X^3]}{(E[X^2]^3\lambda t)^{1/2}}$
19	7	Essas	Esses
20	14	valor esperado da riqueza	valor esperado da utilidade da riqueza
39	36	e do tipo excesso...	e dos tipos excesso ...
40	22	página 32	página 34
41	3	resseguradora	seguradora
42	11	1 Tipos de contratos...	2 Tipos de contratos...
42	4	ajustada	ajustado
63	16	secção 3.2	secção 4.2
88	2	derivada do lucro	derivada do lucro esperado
106	6	pretende	pretendem.

Outras correcções:

- na pág. 48, linha 3, substituir

$$V' = V - \int_A x^2 d\alpha + \int_B x^2 d\beta - 2m_1 + c^2$$

por

$$V' = V - \int_A x^2 d\alpha + \int_B x^2 d\beta + 2m_1 c - c^2;$$

- na pág. 62, linha 2, substituir

$$a_1 = \frac{P(d-c)}{P(1-c) - \lambda(1+\alpha)E[X] - \alpha x_0 \frac{\alpha - (1+\alpha)ln(1+\alpha)}{ln(1+\alpha)}}$$

por

$$a_1 = \frac{P(d-c)}{P(1-c) - \lambda(1+\alpha)E[X] - \lambda x_0 \frac{\alpha - (1+\alpha)ln(1+\alpha)}{ln(1+\alpha)}};$$

- na pág. 84, linha 13, substituir

$$\lambda_i E[X_i] - \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x)$$

por

$$\lambda_i a_i E[X_i] - \lambda_i \int_{\frac{M_i}{a_i}}^{+\infty} (a_i x - M_i) dG_i(x);$$

- na pág. 87, linha 11, substituir

$$\frac{\delta L}{\delta M_i} = \lambda_i \alpha_i \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) > 0$$

por

$$\frac{\delta E[L]}{\delta M_i} = \lambda_i \alpha_i \left(1 - G_i\left(\frac{M_i}{a_i}\right)\right) > 0;$$

- e na pág. 100, linha 18, substituir

$$F_{\hat{R}} = F\left(\hat{R}; a_1, ..., \hat{R^{-1}} ln(1 + \alpha_n)\right)$$

por

$$F_{\hat{R}} = F\left(\hat{R}; a_1, ..., \hat{R^{-1}} ln(1 + \alpha_n)\right) = 0.$$